



SCM

# Notícies

41

Juliol 2017

- Cangur 2017: un cangur de sis xifres
- Abel in Barcelona
- Quant cobra un matemàtic?
- «Història de la matemàtica» de Josep Pla i Carrera



Joaquim Chancho, pintor



Institut  
d'Estudis  
Catalans



---

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

---

President: Xavier Jarque i Ribera  
Vicepres.: Enric Ventura i Capell  
Vicepres. adj.: Iolanda Guevara  
i Casanova

Secretari: Albert Ruiz i Cirera  
Tresorera: Natàlia Castellana i Vila  
Vocals: Albert Avinyó i Andrés  
Marta Berini i López-Lara  
Núria Fagella i Rabionet  
Alberto Herrero Izquierdo  
Josep Grané i Manlleu  
Carles Romero i Chesa  
Manuel Udina i Abelló

Delegat  
de l'IEC: Joan Girbau i Badó

---

Comunicacions:

Carrer del Carme, 47  
08001 Barcelona  
Tel.: **932 701 620**  
Fax: **932 701 180**  
A/e: scm@iec.cat

Secretària: Núria Fuster  
Tel.: **933 248 583** de 10 a 17 h

---

SCM/Notícies  
Juliol 2017. Número 41

Edita:  
Societat Catalana de Matemàtiques  
(filial de l'Institut d'Estudis Catalans)  
Editor en cap: Albert Avinyó i Andrés  
albert.avinyo@udg.edu

---

Disseny: Teresa Sabater

---

Foto de portada:  
Joaquim Chancho, pintor

ISSN: 1696-8247  
Dipòsit Legal: B.9480-2003

---

## Índex

---

<b>La Junta informa</b>	<b>1</b>
<b>Editorial</b>	<b>2</b>
<b>Internacional</b>	<b>3</b>
La columna de l'EMS . . . . .	3
Reunió de presidents de les societats de l'EMS . . . . .	5
<b>Noticiari</b>	<b>8</b>
Les universitats informen . . . . .	8
Activitat del MMACA a Tarragona . . . . .	15
José Rodellar, nou director del Departament de Matemàtiques de la UPC . . . . .	17
Renovació a la junta de FEEMCAT . . . . .	18
<b>Activitats</b>	<b>19</b>
LIII Olimpíada Catalana de Matemàtiques . . . . .	19
Abel in Barcelona . . . . .	21
Presentació de la <i>Història de la matemàtica</i> . . . . .	23
Dissabte Transfronterer a l'Alt Empordà . . . . .	24
Primera edició del premi Noether . . . . .	25
LIII Olimpíada Matemàtica Espanyola . . . . .	27
Viquimarató Matemàtica Intermedària 2017 . . . . .	29
Barcelona Mathematical Days 2017 . . . . .	29
vídeoMAT: matemàtiques per respondre preguntes . . . . .	31
Cangur 2017: un cangur de sis xifres . . . . .	33
Activitats amb ajut de la Societat . . . . .	35
<b>Premis i convocatòries</b>	<b>38</b>
<b>Contribucions</b>	<b>41</b>
Sobre la <i>Història de la matemàtica</i> , de Josep Pla . . . . .	41
Quant cobra un matemàtic? . . . . .	43
Conjectura GCI: una història ben particular . . . . .	47
Sistemes complexos al CRM . . . . .	50
<i>Graceful, Harmonious and Magic Type Labelings</i> . . . . .	58
<b>La pregunta de la SCM/Notícies</b>	<b>59</b>
<b>Cultura i matemàtiques</b>	<b>64</b>
Matemàtiques a l'art i art a les matemàtiques II . . . . .	64
<i>Fermat's Last Tango</i> . . . . .	73
<i>Hidden Figures</i> . . . . .	75
<i>Experiencing Mathematics. What do we do, when we do mathematics?</i> . . . . .	78
Primer premi del concurs de relats Cangur 2017 . . . . .	80
<b>Racó biogràfic</b>	<b>83</b>
<b>Problemes</b>	<b>92</b>
Matemots . . . . .	98
<b>Tesis</b>	<b>99</b>

## Report de la Junta

Albert Ruiz  
Secretari de la SCM

Comencem aquest report informant de les accions dutes a terme des de l'anterior informe, aparegut a la *SCM/Notícies 40*.

Destaquem que el mes de gener passat es va reunir a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) el Comitè Abel. Dins d'aquest esdeveniment, el 16 de gener es va organitzar una jornada oberta al públic amb xerrades de Luigi Ambrosio (Scuola Normale Superiore, Pisa), Ben Green (University of Oxford) i Louis Nirenberg (Courant Institute, New York University, premi Abel 2015). A la reunió del Comitè es va decidir el premi Abel 2017, que es va fer públic el passat 21 de març i es va concedir al professor Iver Meyer, de l'École Normale Supérieure Paris-Saclay, França.

El 23 de gener el professor Josep Pla va presentar el llibre *Història de la matemàtica (Egipte, Mesopotàmia i Grècia I)* a la seu de l'IEC. En el moment de fer aquest informe hem rebut la notícia que l'autor ha estat guardonat amb el premi Crítica Serra d'Or de Recerca (Altres Ciències) 2017, per la qual cosa el felicitem per aquest reconeixement.

El 27 i 28 d'abril passat va tenir lloc a la seu de l'IEC els Barcelona Mathematical Days. El Comitè Científic de la SCM va escollir quatre conferencians plenaris: Marino Arroyo (Universitat Politècnica de Catalunya), Daniel Peralta-Salas (Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid), Samir Siksek (University of Warwick) i Sara van de Geer (Swiss Federal Institute of Technology in Zürich), a més de sis sessions temàtiques: «Algebra, Geometry and Biology», «In and Around the Mapping Class Group», «Mathematics in Space Science», «Modularity and Diophantine Equations: Exploring Wiles' Universe», «New Perspectives in PDEs and Applications» i «Progress in Transport Phenomena» que es van desenvolupar en el format de sessions paral·leles. Cal destacar l'èxit de l'esdeveniment, amb l'assistència de més de cent participants.

Entre les activitats dirigides a estudiants d'ensenyament secundari cal destacar la realit-

zació de les proves Cangur el 16 de març passat, amb la participació de més de cent mil alumnes entre Catalunya i Andorra. Actualment hi ha tres modalitats a les proves Cangur: primària (cinquè i sisè), entre primer i tercer d'ESO, i quart d'ESO i secundària postobligatòria. De les tres modalitats, les dues primeres es desenvolupen als centres d'estudi, mentre que en la tercera es desplacen a les seus oficials. L'entrega dels premis tindrà lloc el proper 29 de maig al Teatre Poliorama.

En l'apartat de premis, el 21 d'abril es van entregar a la seu de l'IEC els premis Sant Jordi 2017, dels quals destaquem els que corresponen a la nostra societat:

- El premi Albert Dou es va atorgar a Armen-gol Gasull i Embid pel treball «L'infinít i més enllà».
- El premi Évariste Galois, a Joan Claramunt Carós pel treball «Differential Galois theory».
- El premi Emmy Noether, a Aitor Nicolás Azemar Carnizero pel treball «Hausdorff dimension of the fraccional Brownian motion» i Óscar Rivero Salgado pel treball «Birch and Swinnerton-Dyer conjecture». Així mateix, es va concedir una menció honorífica a Sergi Baena i Miret pel treball «Generalizations of the Hexagramme mystique».

Després de resumir les activitats que es van dur a terme, cal destacar que la SCM ha donat suport a les activitats següents amb el fons de promoció d'activitats: Geogebra, Jornada d'Investigadors Predoctorals Interdisciplinària, Planter Sondejós i Experiments.

Finalment, en referència a les activitats programades, cal posar en relleu la trobada de les societats catalana, espanyola i sueca de matemàtiques, que se celebrarà entre el 12 i 16 de juny a Umeå, Suècia. Entre el 27 i el 29 de setembre hi ha prevista la segona trobada de les societats catalana i d'Edimburg de matemàtiques a Edimburg.

## Editorial

Albert Avinyó

Editor de la *SCM/Notícies*

Benvolguts socis i lectors,

Aquest matí calorós de diumenge de finals de juny em dispo a escriure aquest editorial des del parc del Segre de la Seu d'Urgell. A la meva dreta, les imponents parets, ja netes de neu, de la serra del Cadí; a l'esquerra, els no menys majestuosos contraforts llombards de la catedral de Santa Maria i, tot just al davant, el riu Segre, que porta l'aigua encara freda de les muntanyes pirinenques cap a les terres més càlides de Ponent.

Voldria aprofitar aquest editorial per donar una explicació, fer un recordatori i, finalment, expressar un agraïment.

Si torneu a llegir o recordeu l'editorial del número 39 de la *SCM/Notícies* veureu que fou escrit aquest mateix cap de setmana però d'ara fa tot just un any. Això vol dir que, no sense esforç, hem aconseguit que la nostra revista tingui un caràcter semestral. El funcionament intern de la SCM, algunes restriccions externes, com el tancament de caixa per part de l'IEC a finals de novembre, així com el procés natural d'elaboració de la revista (recollida d'articles, correcció de català, maquetació, impressió i distribució) ens han fet veure que la millor manera de funcionament temporal és tancar un número a principis de juliol i un altre tot just abans de Nadal. Això fa que els socis de la SCM pugueu rebre a casa vostra un exemplar a mitjan setembre i un altre a finals de gener. Esperem i desitgem poder seguir complint amb aquesta previsió temporal en els propers números!

Fa un parell de setmanes, un company matemàtic em va fer notar dos fets positius dels darrers números de la *SCM/Notícies*. D'una banda, havien augmentat les entrades a la secció «Premis» i, de l'altra, no hi havia cap article a la secció «In memoriam». Tot i que aquesta darrera part de l'observació és certa,

en aquest editorial sí que m'agradaria dedicar un espai al record del doctor Pere Mir i Puig, que ens va deixar el 10 de març passat. La fundació privada CELLEX, creada per ell l'any 2003, s'ha convertit en la gran mecenes de la ciència catalana d'aquests darrers anys. En el cas particular de les matemàtiques, i de la mà de Josep Grané, ha esdevingut un actor de referència de bona part de les accions destinades a la promoció del talent matemàtic entre els més joves. Les Beques CIM+CELLEX són la seva acció principal, però durant aquests darrers anys també ha donat suport a iniciatives diverses de la SCM: el programa Estalmat, les proves Cangur, i els premis Noether en són alguns exemples. Serveixin aquestes línies per mostrar la nostra més sincera gratitud.

Tal com també em deia fa poc un altre company de professió: tota revista de matemàtiques ha de tenir sempre una secció de problemes. I la nostra la té, i això és gràcies, sense cap mena de dubte, a Carles Romero que durant 17 anys ha estat al capdavant d'aquesta secció. Als que heu gaudit i encara ho feu resolent els problemes no cal que us recordi la professionalitat i l'ordre amb el qual en Carles ha portat aquesta secció durant tot aquest temps. Ara que en Carles ha decidit deixar la seva coordinació, només li podem dir: Gràcies, moltes gràcies, Carles!

Però també us he dir, tal com veureu en aquest número, que la secció té un nou coordinador que ens permetrà a tots seguir gaudint de la resolució de problemes. Juanjo Rué, professor de la UPC, ha acceptat el repte de coordinar-la durant els propers números. Juanjo, moltes gràcies per acceptar l'encàrrec i sigues benvingut a la família, cada cop més extensa, de col·laboradors de la *SCM/Notícies*.

I ja només em resta, ara que estic a punt de rebre l'estiu, desitjar-vos un bon inici de curs el proper setembre.

### La columna de l'EMS

Eva Miranda

Universitat Politècnica de Catalunya

Membre corresposal EMS-SCM

En aquesta edició destaquem:

- **Yves Meyer, premi Abel 2017.**

El dia 21 de març l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres va concedir el premi Abel 2017 a Yves Meyer, de l'École Normale Supérieure Paris-Saclay, França, «pel seu paper clau en el desenvolupament de la teoria d'ondetes». Yves Meyer, de 77 anys, ha estat el líder visionari en el desenvolupament d'una teoria que es troba a la intersecció de les matemàtiques, la tecnologia de la informació i la computació. La teoria d'ondetes s'ha aplicat a diversos escenaris, com ara l'anàlisi harmònica, la compressió de dades, el cinema digital i fins i tot la recent detecció d'ondes gravitacionals del projecte LIGO. Yves Meyer va rebre el premi del rei Harald V a Oslo el proppassat dia 23 de maig. El premi és una proposta del comitè Abel que es va reunir per darrer cop a l'Institut d'Estudis Catalans, sota els auspicis de la Societat Catalana de Matemàtiques (<http://abelinbcn.espais.iec.cat/>).

- **Janós Kollár i Claire Voisin, premi Shaw 2017.**

El premi Shaw en ciències matemàtiques 2017 es va concedir *ex aequo* a **János Kollár** (Universitat de Princeton) i **Claire Voisin** (Collège de France) pels «seus resultats remarcables en àrees centrals en geometria algebraica que han transformat el camp i donat la solució de problemes oberts des de fa molt temps que semblaven inassolibles». <http://www.shawprize.org/en/shaw.php?tmp=3&twoid=104&threeid=268&fourid=510>

Claire Voisin és la primera dona matemàtica que aconsegueix el premi que es va constituir l'any 2004. La llista de tots els premiats la teniu disponible aquí: <http://img.tvb.com/shawprize/upload/en/1an2glh75yrb.jpg>

Claire Voisin ens visitarà properament a Barcelona amb ocasió de la seva participació com a conferenciant al Col·loqui FME-UPC el novembre del 2017.

- **ICM2022.**

El Congrès Internacional de Matemàtiques ICM 2022 tindrà lloc a Europa després de setze anys! Encara no es coneix la seu de l'ICM 2022 però les úniques ciutats candidates són París i Sant Petersburg.

- **Trobada Societat Matemàtica d'Edimburg i Societat Matemàtica Catalana.**

Els dies 27, 28 i 29 de setembre de 2017 es farà la trobada conjunta de la societat catalana d'Edimburg i la Societat Catalana de Matemàtiques a Edimburg. Els conferenciant plenaris d'aquesta trobada són Pere Ara (Universitat Autònoma de Barcelona), Marta Casanelles (Universitat Politècnica de Catalunya), Natalia Castellana (Universitat Autònoma de Barcelona), Ernesto Estrada (Universitat de Strathclyde), Xiaoyu Luo (Universitat de Glasgow) i Stefaan Vaes (KU Leuven) i, també, una *public lecture* a càrrec d'Àlex Arenas (Universitat Rovira i Virgili).

A més d'aquestes conferències plenàries s'han convocat nou sessions especials.

Trobareu més informació a l'enllaç: <http://icms.org.uk/workshops/EMSSCM#programme>

- **Fes-te soci de l'EMS.**

Encara no ets soci de l'EMS? La Societat Europea de Matemàtiques té acords de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques europees. La quota per ser soci de l'EMS és de 25 euros anuals per als socis de la SCM <http://euro-math-soc.eu/individual-members>.

Si ets soci de l'EMS et beneficiaràs dels avantatges dels socis de la Societat Europea i, a més, rebràs una còpia de la revista *Newsletter of the European Mathematical Society*, que es publica quatre cops a l'any. Recorda que si ets estudiant et pots fer membre de l'EMS sense pagar la quota durant tres anys. Més informació al web: <http://www.ems.org>.

- **Posicionament de l'EMS en qüestions polítiques.**

- El president de l'EMS, Pavel Exner, expressa la seva preocupació per l'ordre executiva del Donald Trump Travel Ban: <http://euro-math-soc.eu/news/17/01/31/ems-president-trumps-executive-order>.
- L'EMS s'ha adherit a la carta oberta sobre les polítiques als Estats Units sobre restriccions en immigració, així com els canvis en política científica: <http://www.euroscience.org/news/press-release-open-letter/>

- **Crides obertes.**

- Crida oberta per les ERC Advanced Grants: data límit 31 d'agost de 2017. Més informació a <https://erc.europa.eu/funding/advanced-grants>.
- Beques postdoctorals Marie Curie. Convocatòria oberta fins al 17 de setembre de 2017. Més informació a: <https://ec.europa.eu/research/participants/portal/desktop/en/opportunities/h2020/topics/msca-if-2017.html>
- Programa PRIMA per a dones en matemàtiques que es trobin en les fases inicials de la carrera acadèmica: <http://www.snf.ch/en/funding/careers/prima/Pages/default.aspx>
- Anuncis d'ofertes de treball a diversos nivells a la plataforma math hire <https://mathhire.org/>.

- **Butlletí de la Societat Matemàtica Europea.**

- Teniu a la vostra disposició de manera gratuïta tots els números de la revista *Newsletter of the EMS* a: [http://www.ems-ph.org/journals/all\\_issues.php?issn=1027-488X](http://www.ems-ph.org/journals/all_issues.php?issn=1027-488X)

- **La Societat Matemàtica Europea a les xarxes socials.**

Recordem els canals de la Societat Matemàtica Europea:

- Facebook: <https://www.facebook.com/EMSnewsletter>
- Twitter: <https://twitter.com/EMSnewsletter>
- GooglePlus: <https://plus.google.com/u/0/+EuromathsocEurope>

- **Altres informacions.**

- 2018, Any de la Biologia Matemàtica: <http://www.euro-math-soc.eu/year-mathematical-biology-2018/>
- Segona edició del premi de la Unió Matemàtica Italiana, UMI. La Unió Matemàtica Italiana convoca un premi de 4.000 euros per a un monogràfic en matemàtiques (data límit 31 d'octubre de 2017). Més informació: <http://umi.dm.unibo.it/2017/01/31/book-prize-of-the-unione-matematica-italiana-new-announcement/>
- 19th ÖMG Congress and Annual DMV Meeting. Les societats matemàtiques austríaques i alemanyes organitzen un congrés conjunt cada quatre anys. El congrés conjunt tindrà lloc de l'11 al 15 de setembre de 2017. <http://oemg-dmv-2017.sbg.ac.at/>

Vull acabar aquesta columna de l'EMS amb una nota personal.

La propera columna l'escriurà el nostre company Martí Lahoz de la Universitat de Barcelona, que a partir d'ara actuarà com a membre corresponsal de l'EMS i, en particular, redactarà aquesta columna.

Aprofito aquesta ocasió per agrair a l'anterior president de la SCM, Joan Solà-Morales, que em va proposar ser membre corresponsal de la SCM a l'EMS l'any 2011. En principi, jo era reticent a assumir aquesta nova responsabilitat no per falta de motivació sinó per falta de temps, però ara li ho agraeixo efusivament. Ha estat una experiència molt gratificant i enriquidora. També vull donar les gràcies a Marta Sanz (anterior presidenta de l'EMS), per les converses sobre temes d'interès a la Societat

Matemàtica Europea; i a Carles Casacuberta, per compartir amb mi la seva dilatada experiència en qüestions de la Societat Matemàtica Europea i donar-me sempre molts bons consells. Finalment, agraeixo la col·laboració i la paciència dels editors de la *SCM/Notícies*

durant aquests anys: Enric Ventura, Xavier Jarque i Albert Avinyó. Una menció especial a Xavi Jarque per tot el seu suport com a president de la SCM!

Segueixo a la vostra disposició i us deixo en bones mans. Bona feina, Martí!

## Reunió de presidents de les societats filials de l'EMS

Xavier Jarque  
President de la SCM

Com cada any, en cap de setmana, s'ha fet la trobada de presidents de les societats de matemàtiques membres de l'EMS (vegeu <http://euro-math-soc.eu/meetings-presidents>). La idea és organitzar una trobada anual de tots els membres, representats pel seu president o per la persona que el president designi, per informar dels temes del dia a dia de l'EMS i proposar debats tant d'actualitat com de política científica i matemàtica. La trobada, doncs, no pren decisions executives, només és informativa i de debat. Les qüestions executives corresponen al comitè executiu i al Council (és a dir, l'assemblea) que es reuneix cada dos anys. La propera trobada del Council serà el 2018 i la següent el 2020, coincidint amb l'European Congress of Mathematics d'Eslovènia.

Malgrat que, com dèiem, la trobada de presidents no és executiva penso que és una gran idea i enforteix els lligams entre les diferents societats i cohesiona l'EMS. Aquest any ha estat a Lisboa, convidats per la Societat Matemàtica Portuguesa (SMP) en el mateix lloc on es va fer la primera trobada de presidents de l'EMS. També com cada any, la trobada comença el dissabte al migdia i s'acaba diumenge a l'hora de dinar. La reunió van tenir lloc al museu de la Fundação Calouste, molt a prop de la plaça Espanya a Lisboa. L'edifici de la fundació té com a peça més representativa un quadre (o si voleu una obra d'art en un sentit més ampli) d'Almada Negreiros, en què l'autor juga amb diverses figures geomètriques i raons numèriques per plasmar la seva obra. Podeu veure'n informació a <https://gulbenkian.pt/almada-comecar/en/>. Just abans de sopar un estudiós de la seva obra en col·laboració amb un professor de la Universidade de Lisboa van explicar el valor artístic i matemàtic de la seva obra (vegeu la fotografia).

L'acte d'obertura de la reunió va ser a càrrec de Manuel Heitor, enginyer mecànic i ministre de Ciència, Tecnologia i Ensenyament Superior. Després, el president de la SMP, Jorge Buesco, va fer una presentació de la societat. Ens va explicar que va ser fundada el 1940 i actualment té un 800 socis (com la SCM!) dels quals majoritàriament són professors universitaris però també s'hi compten professors d'ensenyament obligatori que alhora tenen la seva pròpia organització (la FEEMCAT portuguesa, per dir-ho d'alguna manera). L'any 1937 va sortir el primer volum de la *Revista Portugalia Matematica*, la revista de recerca de la societat, actualment en el tercer quartil del JCR. També publiquen un butlletí i una gasetta. Una activitat rellevant que tenen és l'organització de l'Olimpíada Matemàtica fase portuguesa, i de fet el proper 2018 organitzaran (amb la RSME) l'Olimpíada en la fase iberoamericana.



Un cop feta aquesta presentació el president de l'EMS, Pavel Exner, va començar el seu informe. Va ser llarg i només comento aquells aspectes que crec que tenen més interès per als lectors de la *SCM/Notícies*.

- L'EMS rep darrerament força peticions de suport a qüestions de caràcter més polític

que científic (temes com la immigració o situacions de col·legues en països en situació de guerra, etcètera). Malgrat que l'EMS no es pot evadir de la realitat dels esdeveniments que vivim, cal mesurar bé els posicionaments.

- En els darrers mesos han sortit dos vicepresidents del comitè executiu de l'EMS (Franco Brezzi i Martin Raussen), i han entrat dos nous substituïts (Volker Mehrmann i Armen Sergeev). Es dona la benvinguda als nous membres i s'agraeix la feina feta a qui deixen la responsabilitat.
- Després de Rio de Janeiro, només hi ha dues candidatures per a l'organització de l'International Congress of Mathematics, i són París o Sant Petersburg. Per tant, Europa acollirà altre cop l'ICM. L'EMS se'n felicita i dona suport explícit a les dues candidatures.
- Darrerament l'EMS ha posat l'accent en activitats de matemàtiques en països en procés de desenvolupament. En particular hi ha un acord amb la Simons Foundation (<https://www.simonsfoundation.org/>) per invertir fins a 250.000 dòlars en un programa de quatre anys d'activitats matemàtiques en països de l'Àfrica.
- En el darrer any l'EMS ha guanyat uns dos-cents socis. Els estudiants (tant de grau com de doctorat) continuen tenint l'opció de fer-se socis gratuïtament adjuntant una carta d'un tutor o director de tesi; aquests socis, però, no reben la revista (només accés electrònic). Potser podríem pensar en una acció semblant per a la SCM?
- Es demanarà a les persones que són membres dels diferents comitès de l'EMS que siguin també membres individuals. El fet que actualment alguns membres dels comitès no siguin membres individuals ha causat algun problema. El president, a més, insisteix en la importància que les persones que tenen representació a l'EMS en siguin membres individuals. De fet, fa saber que diverses de les persones que seuen a la reunió de presidents no són membres individuals. Sense voler fer sang mostra el seu desacord i demana a tothom que no és membre individual faci el pas com abans millor (el representant de la SCM és membre individual des del 2012).
- També hi ha problemes amb els membres institucionals que han deixat de pagar la quota. La posició de l'EMS no vol ser com la IMU (expulsió en cas que hi hagi tres endarreriments) però s'estan fent gestions per revertir la situació.
- S'està fent feina al web (i en general la comunicació electrònica de l'EMS) amb l'ajut inestimable de Vicente Muñoz (RSME) i Milagros Izquierdo (Swedish Mathematical Society). En particular s'ha contractat l'empresa MathHire.org (<https://mathhire.org>) per gestionar ofertes de treball per a matemàtics; després d'un temps prudencial sobre els resultats obtinguts es farà la renovació del contracte o no.
- El comitè executiu està valorant ofertes per part de les societats membres per decidir on fer les properes trobades periòdiques de l'EMS (*presidents, councils, math-weekends*, etcètera). Actualment hi ha fixats les assemblees dels anys 2018 i 2020, a Praga, del 22 al 24 de juny, i Portoroz (coincidint amb el 8ECM), respectivament. La SCM ja ha manifestat al president de l'EMS l'oferta que alguna de les activitats es facin a Catalunya, però la voluntat de l'EMS és que algunes societats menys actives prenguin la iniciativa (la SCM ha estat seu de diverses activitats en els darrers anys). Estem, doncs, a l'espera.
- En el Council de Praga deixen el càrrec a l'executiva el president de l'EMS i el vicepresident Volker Mehrmann. Per tant, hi haurà eleccions.
- En els propers mesos les societats hauran de presentar els possibles candidats per formar part del comitè científic del 8ECM (així com els possibles membres dels jurats dels premis que s'atorguen durant el congrés). La SCM ja està fent la feina a través del seu comitè científic.

Per trencar una mica la monotonia de l'informe, després d'aquest punt hi va haver la presentació del congrés 8ECM de Portoroz (Eslovènia). Serà al mes de juliol del 2020. Tota la informació que hi ha disponible a dia d'avui la podeu trobar a <http://www.8ecm.si>. Els punts més rellevants de la presentació van ser els següents:



1. El Council just abans del congrés es farà a prop de Ljubljana.
2. Hi haurà menys *plenary speakers* que a Berlín.
3. Només s'acceptaran com a congrés «satèl·lit» del 8ECM aquells que justifiquin molt bé la connexió amb el 8ECM. S'ha donat el cas que alguns congressos satèl·lits, per diferents raons, provoquen que els seus participants no participin en l'ECM. Hi haurà avantatges per als participants dels satèl·lits en el pagament de les quotes d'inscripció.
4. S'aprofitarà que la localització és costanera per preparar moltes activitats familiars (per a nenes i nens) per fomentar la participació d'investigadors amb les famílies.

Un cop acabada la presentació, el president de l'EMS va demanar que els membres dels diversos comitès científics del 8ECM assisteixin al congrés (cosa que no sembla que hagi passat a Berlín). A continuació es va seguir amb l'informe del president.

- La situació econòmica de l'EMS és bona. De fet, el 2018 hi haurà més finançament (òbviament seguint els mateixos estàndards d'excel·lència científica) per a activitats finançades per l'EMS ja que l'any passat no es va finançar tot el que estava previst. No sé si quan pugueu llegir aquest article ja no hi serem a temps, però la data límit per participar-hi és el 30 de setembre de 2017 (per a les activitats de l'any 2018).
- També es va parlar de les discussions sobre el proper programa marc de la UE (el que substituirà l'Horizon 2020). Sembla que l'ERC seguirà disposant de força capacitat i que l'actual president, Jean-Pierre Bourguignon, seguirà en el càrrec un altre mandat. Amb tot, hi va haver diverses veus que van ser molt crítiques amb l'esperit dels programes de l'ERC, en què molt pocs investigadors acumulen la major part del finançament. Alguns representants de societats (recordo segur el president de la Societat Matemàtica Italiana) diuen que aquesta política no és l'apropiada per fer caminar la recerca en matemàtiques.
- L'any 2018 serà l'any de la biologia matemàtica. Hi haurà moltes activitats centrades en aquest àmbit de recerca. La informació la podeu trobar a <http://euro-math-soc.eu/year-mathematical-biology-2018>.
- El punt de l'informe següent són les activitats dels diferents comitès de l'EMS. Podeu trobar-ne tota la informació a <http://euro-math-soc.eu/committees>. Destaco aquí només alguns punts. S'ha canviat el comitè d'educació per tal que tingui un perfil més aplicat i no de teoria de l'educació (és a dir, almenys així ho vaig entendre, es busca més un comitè de «professors» que d'investigadors en «didàctica de les matemàtiques»). També s'informa que el comitè d'ètica (el més jove dels comitès) va fent la seva feina en el camp dels plagis o les còpies, però que és difícil ja que no hi ha una legislació universal sobre aquest tema i, per tant, només es poden posar els fets en el coneixement dels qui poden prendre decisions, però no es poden adoptar decisions executives des del comitè. S'ha creat un nou comitè sobre publicacions i comunicació electròniques.
- L'EMS té la Publishing House com a editorial de referència per a les seves publicacions. L'editorial té 15 anys d'història. El president va fer algunes consideracions economicolegals que prefereixo no reflectir ja que no les recordo amb prou detall i no voldria exposar dades que no corresponen exactament a la realitat. En tot cas és un tema delicat.
- La IMU ha d'escollir nou president i secretari. Malgrat que en aquell moment no se sabia, ara ja és públic que el comitè de nominacions de la IMU ha proposat Carlos Kenig (Estats Units) i Helge Holden (Noruega), com a IMU-president i IMU-secretari, respectivament, per al període 2019-2022. L'elecció tindrà lloc a l'Assemblea General de Sao Paulo.
- Yves Meyer ha guanyat el premi Abel 2017.

En aquest punt de l'informe es va fer una pausa per escoltar algunes presentacions. Us parlo aquí de les que em van semblar més interessants.

La presentació de les activitats de l'Edinburgh Mathematical Society (amb la qual la SCM farà una trobada conjunta al

mes de setembre del 2017, dels dies 27 al 29; de fet, aquesta trobada és el retorn de la que vam fer a Barcelona l'any 2014). La Societat Matemàtica d'Edimburg es va fundar el 1883 i actualment és membre del UK Council of Mathematical Sciences. Les seves activitats fan referència a recerca i ensenyament obligatori. Editen la revista *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, que és la seva principal font de finançament. Dins de la societat el tema d'actualitat més important és l'efecte que tindria (tindrà) el Brexit o, eventualment, un referèndum que resultés la proclamació de la independència d'Escòcia. Va explicar-ne els pros i contres dels diversos escenaris.

La segona presentació va ser a càrrec del vicepresident de la Societat Matemàtica de Turquia. Va explicar els preparatius de la conferència de matemàtiques del Caucas, que de fet és una trobada conjunta de set societats matemàtiques de la regió. S'havia de fer l'agost de l'any 2016, però es va suspendre pels problemes polítics que va viure (i viu) Turquia. Es farà a la ciutat de Van, a l'interior de Turquia.

Finalment, el representant de la societat matemàtica francesa va explicar algunes novetats sobre aquesta entitat. Ens va comunicar que el CIRM (Centre Internacional de Recerca Matemàtica) està construint un edifici annex per poder acollir més persones durant els congressos. També ha ampliat el programa Research in Pairs per poder passar uns dies

al CIRM en grups de no més de quatre o cinc persones que treballen en un projecte de recerca comú. Han organitzat una competició matemàtica per a joves amb format molt semblant als que organitzem des de la SCM i la FEEMCAT. Es proposen deu problemes i cal resoldre'ls en deu dies per grups. Finalment, també va informar que l'any 2016 es va fer el primer congrés de recerca matemàtica de la societat matemàtica francesa i l'any 2018 se'n celebrarà la segona edició. No m'he equivocat: la SMF ha organitzat el primer congrés l'any 2016... i la SCM el primer l'any 2014 i el segon l'any 2017; així que no estem tan malament!

El diumenge al matí el vam dedicar a parlar de qüestions més obertes. El president va proposar diversos temes. El més destacat va ser una discussió llarga sobre les publicacions en paper *versus* les publicacions electròniques. Es van considerar els pros i contres. Òbviament, reduir els costos que la societat paga per la recerca (molts dels quals són per pagar l'accés a les publicacions) anava a favor de publicar en versió electrònica. En contra dos arguments força diferents. D'una banda, algunes societats tenen com a font de recursos principal la «venda» de la revista (inclosa la mateixa EMS). De l'altra, els processos de *referee* de moltes revistes *open acces* no semblen prou sòlids.

Fins aquí arriba aquest informe. Insisteixo: la reunió de presidents és una molt bona decisió de l'EMS.

## Noticiari

### Les universitats informen

#### Activitats divulgatives del Departament de Matemàtiques de la UAB

Armengo Gasull

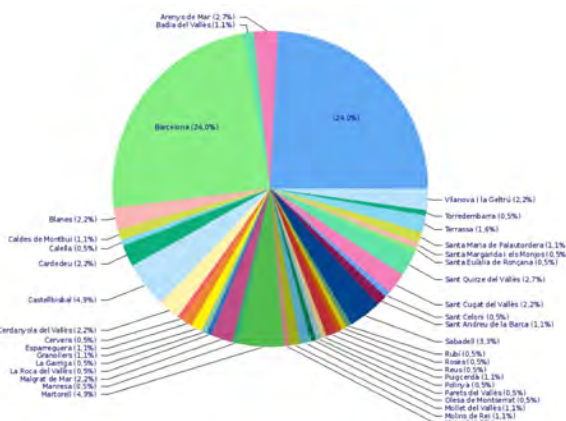
Coordinador de Relacions amb Secundària

Departament de Matemàtiques de la UAB

A banda de les classes preparatòries per a l'Olimpiada Matemàtica i les proves Cangur de les quals ja parlàvem en el número anterior, durant el present curs el nostre departament s'ha centrat en la cele-

bració dels ja esperats Dissabtes de les Matemàtiques i en la participació en diverses activitats preparades conjuntament amb l'Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la UAB.

Els Dissabtes d'enguany van tenir com a títols: «Tot mesurant l'univers»; «Loteries, apostes, partícules, estrelles i fraus: aleatorietat»; «L'art de fer demostracions matemàtiques», i «Els fractals a la natura». Els conferencians respectius van ser E. Gallego, J.L. Solé, J.J. Carmona i J. Torregrosa, professors del nostre departament. A part del primer dissabte que, com ja és costum es fa coincidir amb un Dissabte de la Física, les xerrades s'imparteixen juntament amb uns tallers en els quals els assistents aprofundeixen més en els temes tractats i gaudeixen de les matemàtiques.



Procedència dels assistents als Dissabtes

Podeu consultar les presentacions de les xerrades al web del departament (<http://www.uab.cat/matematiques/>), a la pestanya «Divulgació». La mitjana de participants en cada dissabte va ser de vuitanta, un número ideal que va permetre una relació personalitzada entre els assistents i els monitors dels tallers, tasca portada a terme amb entusiasme pels estudiants dels graus en Matemàtiques i Estadística.



Taller de fractals



Monitors amb el conferenciant

Pel que fa a les col·laboracions amb l'ICE que hem comentat, a part de la participació de diferents membres del departament en l'assessorament de treballs de recerca que oferim en el programa Argó i les estades d'estudiants de batxillerat dins del mateix programa al nostre departament (que enguany es duran a terme a finals de juny i principis de juliol) durant el present curs va tenir lloc amb èxit la VIII Jornada «Les matemàtiques entre la secundària i la universitat». El tema ha estat «Les matemàtiques i la natura» i va constar de dues conferències: «Quan la natura parla de matemàtiques» a càrrec d'Àngel Calsina i «El retrocés de les geleres» a càrrec de Jaume Serra, seguides d'una interessant taula rodona «Ensenyem prou matemàtica aplicada?», moderada per Sílvia Cuadrado i amb la participació de Carles Barril, Eduard Bosch, Ramon Casals i Jaume Soler.

Voldria acabar aquest escrit amb el recordatori dels materials que es poden consultar al web <http://experiencingmaths.org/>. Aquests continguts van aparèixer com una versió virtual d'una exposició física (<http://www.mathex.org/>) que es va dissenyar com a continuació natural d'un programa de divulgació de les matemàtiques de la IMU (International Mathematical Union) de l'any 2000 i ha anat recorrent el món des del 2004 (amb més de dos milions de visitants). Va ser mentre s'estava presentant pel sud de l'Àfrica que va sorgir la idea de crear un material disponible a internet per arribar al nombre més gran possible de llocs, i d'aquesta manera evitar els problemes de manca de recursos que apareixen, en molts casos, quan es vol organitzar un esdeveniment d'aquest tipus. Així, patrocinat per la Unesco i

dissenyat per Michel Darche (Centre-Sciences, ADECUM, Orleans), va néixer aquest lloc web. La versió original només era en francès, anglès i portuguès, però per iniciativa de la Comissió Nacional Andorrana per la Unesco (CNAU), que ens ho va proposar al nostre departament, es va ampliar amb la versió catalana (gairebé al mateix temps, el 2014, que sortia la versió

en àrab). Al final del procés, el CRM també es va incorporar en la tasca d'adaptació al català dels materials.

El públic a qui anava dirigida aquesta exposició estava format, principalment, pels estudiants de secundària i el professorat d'aquest nivell (encara que també té un interès significatiu entre altres segments).

## Activitats de la Facultat de Matemàtiques de la UB del curs 2016–2017

Antoni Benseny i Xavier Massaneda  
Coordinadors d'activitats per a secundària  
Facultat de Matemàtiques, UB

A la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB hem començat l'any amb l'alegria i l'honor de veure com el Dr. Joan Elias, catedràtic d'Àlgebra de la nostra facultat, era escollit nou rector de la universitat. Durant la seva vida acadèmica el Dr. Joan Elias ha compaginat la docència, la recerca en àlgebra commutativa i la gestió. Cal destacar que el Dr. Oriol Pujol, també membre de la nostra facultat, és el nou vicerector de Transformació Digital. Aprofitem l'ocasió per desitjar-los molta sort.

La Dra. Petia Radeva, professora titular d'universitat de la nostra facultat, va ser nomenada IAPR Fellow, el proppassat 7 de desembre, per l'Associació Internacional de Reconeixement de Patrons (IAPR). Aquesta nominació li ha estat atorgada pels seus mèrits científics en el camp de la visió per computador, aprenentatge automàtic, anàlisi d'imatges mèdiques i aplicacions de les TIC a la salut. Aquest reconeixement tan prestigiós s'atorga cada dos anys només al 0,25% dels membres de l'organització científica IAPR per destacar contribucions de valor excepcional en el camp del reconeixement de patrons i l'aprenentatge automàtic.

En un altre àmbit, a fi de commemorar el Dia Internacional de la Dona i la Noia Científiques, que se celebra l'11 de febrer, la Comissió d'Igualtat de la nostra facultat va presentar l'exposició itinerant «Telescopi Assumpció Català» del dia 13 de febrer al 3 de març. Maria Assumpció Català i Poch va ser la primera dona que va obtenir el doctorat en matemàtiques, l'any 1970, a la Universitat de Barcelona. L'exposició consta de catorze plafons on

s'explica qui era Assumpció Català, quins eren els seus camps d'investigació i com han evolucionat, així com quines característiques té el nou telescopi i el Parc Astronòmic del Montsec, on està ubicat.

La Unitat de Cultura Científica i Innovació de la UB va organitzar el 12 de maig la tercera Festa de la Ciència UB. La Festa de la Ciència té com a objectiu fer accessible a tots els públics, d'una manera lúdica i innovadora, la recerca que es duu a terme a la universitat. Durant tot el dia es van dur a terme a l'Edifici Històric, on hi ha la nostra facultat, diverses activitats de divulgació –des d'una gimcana fins a tallers, xerrades i jocs– en què es va destacar la feina dels investigadors de tots els camps del coneixement i es va explicar de quina manera repercuteix la recerca en el progrés de la societat.

Com en els darrers anys, continuem reforçant el suport acadèmic i econòmic a la presència d'alumnes de la nostra facultat a diverses competicions matemàtiques. El dia 5 de novembre de 2016 vam participar a la XIX Olimpiada Matemàtica Universitaria. El 9 de novembre va tenir lloc el Torneig de Tardor, especialment preparat per als alumnes de primer i segon any, i el 25 del mateix mes s'inicià el Tauler de Problemes. Per celebrar el dia  $\pi$  es va dur a terme una competició de dos dies, sincronitzada amb l'Associació Nacional de Estudiantes de Matemáticas, que incloïa proves de càlcul mental i competicions de problemes. També, i en vista de l'èxit de les edicions anteriors, hem repetit la Competició Universitària de Matemàtiques Lluís Santaló,

una prova en memòria del matemàtic gironí, duta a terme el dia de la Matefest-Infifest (vegeu-ne ressenya més avall).

### Activitats per a estudiants i professors de secundària

Com sempre, la facultat segueix posant especial atenció a diverses activitats de divulgació científica destinades, principalment, a l'alumnat d'ensenyament secundari. Aquestes activitats es complementen amb altres activitats d'orientació científica o professional adreçades a l'alumnat de la facultat. Les detallem tot seguit.

- *Xerrades taller.* Els dies 18 i 25 de gener es va portar a terme la xerrada taller titulada «Pensament computacional; més enllà de la programació», preparada pel Dr. Eloi Puertas. El pensament computacional consisteix a prendre un problema complex i descompondre'l en una sèrie de problemes més petits i manejables. Llavors, cadascun d'aquests problemes es pot tractar de forma individual, mirant com s'han resolt problemes similars a aquests prèviament (reconeixement de patrons) i centrant-nos només en els detalls importants, deixant al marge tota aquella informació irrellevant (abstracció). A continuació, es poden definir uns senzills passos o regles per solucionar cada un d'aquests petits problemes (algorismes). Finalment, aquestes regles simples s'utilitzen per programar un ordinador que ajudi a solucionar el problema complex.

Aquesta xerrada taller completà, pel que fa al curs 2016–2017, la que es va celebrar els dies 23 i 30 de novembre, titulada «Estadístiques curioses», en la qual la Dra. Olga Julià ens mostrà com l'estadística és una eina fonamental en la nostra societat, present en gairebé tots els àmbits i que intervé en decisions tan diferents com pot ser l'hora d'emissió d'un debat polític o l'aprovació d'un nou medicament contra el càncer. La Dra. Julià ens mostrà els errors i les manipulacions més freqüents mitjançant exemples concrets.

- *Acolliment de les proves Cangur.* Com cada any la nostra facultat ha estat una de les seus de les proves Cangur organitzades per

la SCM el tercer dijous del mes de març. La majoria de participants, uns dos-cents, aprofitaren aquesta ocasió per tenir el primer contacte amb el nostre centre.

- *Matefest-Infifest.* Aquesta jornada lúdica, celebrada aquest curs el 26 d'abril, pretén presentar una imatge positiva de les matemàtiques i la informàtica davant tota la societat. Amb aquesta finalitat volem captar l'atenció i la curiositat no només dels alumnes de secundària, que estan convidats a través dels seus centres educatius, sinó també de qualsevol persona que hi estigui interessada.

Un tret a destacar d'aquesta festa és que és organitzada enterament pels estudiants de la facultat. Els mateixos estudiants preparen estands, amb exposicions dinàmiques perquè tothom hi pugui participar, i programen conferències amb temes d'interès.

Enguany hem continuat amb les activitats destinades específicament als estudiants de grau iniciades l'any passat amb tant d'èxit: HackAGame (competició per equips de programació de jocs, amb la col·laboració de l'empresa King), taller d'auditoria de xarxes wifi, premi Santaló esmentat més amunt i diverses xerrades de temes d'interès. També hem fet coincidir la Matefest-Infifest amb el final del Tauler de Problemes iniciat la tardor.

Podem trobar tota la informació referent a la Matefest-Infifest a <http://mat.ub.edu/matapps/matefest/>.

- *Jornada de portes obertes.* El mateix dia 26 d'abril, coincidint amb la Matefest-Infifest, es va celebrar la Jornada de Portes Obertes, adreçada a alumnes de batxillerat i cicles formatius de grau superior i altres persones interessades a cursar qualsevol dels graus que s'imparteixen a la facultat, que en l'actualitat són: Enginyeria Informàtica, Matemàtiques, Matemàtiques-ADE, Matemàtiques-Enginyeria Informàtica, Matemàtiques-Física. A més, es van donar a conèixer els diversos serveis universitaris dels quals es poden beneficiar els alumnes de la UB.

- *Activitats optatives del programa CTM.* Dins del marc del programa del Departament d'Ensenyament per a la Formació Científica, Tecnològica i Matemàtica del professorat de secundària, vam oferir una activitat optativa. El mesos de febrer i març el professor Carlos d'Andrea va impartir un minicurs de quatre sessions sobre teoria de jocs, i d'aquesta manera va ampliar el que havia ofert l'any anterior.
- *Trobada anual amb professorat de secundària.* Aprofitant un cop més la Matefest-Infifest es va celebrar també la trobada anual amb professorat de secundària, en la qual va tenir lloc un intercanvi d'opinions sobre l'oferta d'activitats de la facultat, així com d'altres qüestions referents a l'enllaç entre secundària i la universitat.
- *Suport a treballs de recerca en matemàtiques.* L'objectiu d'aquest programa, iniciat fa ja deu anys, és oferir suport des de la facultat tant al professorat tutor interessat a dirigir els treballs com a l'alumnat que els porta a terme.
- *Preparació de l'Olimpiada Matemàtica.* Per setè any consecutiu, la Facultat de Matemàtiques de la UB ha ofert unes sessions de preparació de resolució de problemes per a les proves de l'Olimpiada Matemàtica. Aquestes sessions, coordinades un cop més, i per darrer cop, pel Dr. Manuel Tort, van adreçades a tots els estudiants interessats a participar en la fase catalana de l'Olimpiada Matemàtica.
- *Els Tallers d'Intel·ligència Artificial* pretenen apropar als futurs estudiants una tecnologia d'alt impacte de manera didàctica i divertida i van adreçats a l'alumnat de batxillerat i de cicles formatius. Els centres interessats a participar-hi han de presentar un equip format per dos o tres alumnes i un tutor. Els tallers s'organitzen en cinc o sis sessions tutoritzades de tres hores en les quals els alumnes han de construir i programar un robot per resoldre una tasca complexa. Finalment, coincidint amb la Matefest-Infifest, es disputa una competició entre tots els centres participants, amb un premi al millor treball.
- *Participació al programa Escolab.* Per tercer any consecutiu la nostra facultat ha col·laborat en el programa Escolab, creat per l'Ajuntament de Barcelona i destinat a acostar el món de la recerca als estudiants de secundària. Les activitats de l'Escolab consisteixen en tallers o visites que permeten veure la gran diversitat de laboratoris que existeixen avui i entrar en contacte directe amb els seus equips i les seves línies de recerca. La Dra. Laura Igual va oferir el taller «Com serà la medicina del futur? Anàlisi automàtica d'imatges mèdiques» i la Dra. Maite López impartir oferir el taller «1+1: programant formigues».
- *Participació al programa Bojos per les Matemàtiques.* Dins el marc del programa Bojos per la Ciència creat per la Fundació La Pedrera, la FEEMCAT i la SCM ha renovat aquesta proposta conjunta engegada l'any passat, adreçada als estudiants del primer any de batxillerat de la modalitat de Ciències i Tecnologia. El programa Bojos x les Matemàtiques té per objectiu bàsic fomentar la vocació científica d'aquests joves i, en especial, el seu entusiasme per les matemàtiques. Cinc de les sessions d'aquest programa s'han dut a terme a la UB i, majoritàriament, a càrrec de professorat de la UB.

Trobareu informació sobre totes aquestes activitats, la forma de participar-hi i els terminis per a cadascuna d'elles a la pàgina de la Facultat a <http://mat.ub.edu/matapps/activitats/futurs-estudiants/>.

## Activitat FME juny 2016 – novembre 2016

Jaume Soler

Vicedegà de Relacions Internacionals i Promoció de l'FME

### Curs Pearson

El curs 2016-17 és l'any Karl Pearson a l'FME. El març del 2017 va tenir lloc la Jornada Pearson, que va començar amb la conferència «Correlación lineal y correlación de distancias», impartida per José Ramón Berrendero, professor del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Madrid. El professor Berrendero va parlar de l'anomenada «correlació de distàncies», proposada el 2007 com un sistema eficaç per detectar relacions no lineals entre variables.

Tot seguit, el professor Wenceslao González-Manteiga va parlar sobre alguns resultats recents relatius al concepte de Bondat d'Ajust (concepte introduït per Pearson) a la conferència «An updated review of Goodness-of-Fit test for regression models with some recent results». El professor González-Manteiga és catedràtic d'Estadística i Investigació Operativa de la Universitat de Santiago de Compostel·la.

La darrera conferència va ser a càrrec del professor Lluís A. Belanche del Departament de Ciències de la Computació de la Universitat Politècnica de Catalunya, titulada «Els mètodes kernel i per què els hauríem d'estimar». Els mètodes kernel són una classe d'algorismes que estenen l'aplicabilitat de molts mètodes estadístics a pràcticament qualsevol tipus de dades, sense la necessitat de vectorització o codificació explícita.

En la pausa entre les dues primeres conferències es va fer el lliurament de premis als guanyadors del Concurs Pearson, activitat conjunta de l'assignatura Història de la Matemàtica i de la Biblioteca de l'FME.

L'acte de cloenda del curs Pearson es va fer el mes de maig amb la conferència «Historia de la bioestadística y reflexiones de un estadístico: ¿De dónde venimos y hacia dónde se espera que vayamos?», a càrrec de Vicente Núñez Antón, professor de Mètodes Quantitatius per a l'Economia i l'Empresa a la Universitat del País Basc UPV/EHU (Bilbao).

### Portes obertes, exposicions i activitats diverses

De febrer a maig d'enguany, l'FME ha acollit l'exposició «Les matemàtiques als segells de correus», una col·lecció de 57 reproduccions de segells de diversos països relacionats amb la matemàtica, cedida per ABEAM.

També s'han dut a terme diverses jornades de portes obertes, amb una presentació conjunta dels graus en Matemàtiques, Estadística, Enginyeria Física i el nou grau en Ciència i Enginyeria de Dades.

El mes de març, l'FME va acollir en les seves aules informàtiques la Viquimarató Matemàtica Intermèdia 2017, organitzada per la Societat Catalana de Matemàtiques. Aquesta activitat té l'objectiu de contribuir al manteniment de la qualitat dels continguts matemàtics de les pàgines de Viquipèdia dels nivells que anomenem «intermedis», que corresponen essencialment a batxillerat i a cursos d'universitat de nivell bàsic.

Per tancar aquest resum d'activitats diverses de l'FME esmentarem les dues representacions de l'obra *Arsènic i puntes de coixí* a càrrec de la companyia Fem Teatre FME, amb un gran èxit de públic. És la demostració que els estudiants de l'FME no tan sols fan matemàtiques, també tenen altres inquietuds.



## Activitats per a secundària

Des del començament del curs actual han estat en marxa les activitats de preparació per a les Olimpíades Matemàtiques i per a la prova Cangur, els tallers per a secundària i batxillerat que ofereix l'FME i les activitats que acull els dissabtes: Anem x + Matemàtiques i el projecte Estalmat-Catalunya, finançat per l'Obra Social de Caixabank amb la col·laboració de la FECYT, de la Fundació privada CELLEX, del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya i de l'empresa Casio.

Destaquem l'acte inaugural del programa Bojos per les Matemàtiques, el gener d'enguany, a la Sala d'Actes de l'FME, les proves de selecció per participar a la 15a edició del programa Estalmat (Estímul de les Matemàtiques) per a la promoció 2017–2019, i la cloenda de la promoció 2015–2017 d'aquest programa el mes de juny passat. Al llarg de tot el curs s'han ofert tallers per a estudiants de secundària sobre temes d'història de la matemàtica, estadística i mètodes numèrics.

També cal esmentar la presentació conjunta, el mes de juny, de les activitats per a secundària de les universitats catalanes i de les associacions de professors de matemàtiques per al curs 2017-2018, amb la col·laboració de professors de la UB, la UAB i de professors de les diverses associacions de professorat de secundària.

## Concursos, competicions i premis

Els mesos de maig i juny han vist la resolució i cerimònies de repartiment de reconeixements del premi Poincaré, que organitza l'FME, i el Planter de Sondeigs i Experiments, organitzat conjuntament per la UPC, la UB, la UAB i l'IDESCAT, amb la col·laboració de la Societat Catalana d'Estadística i la Societat Catalana de Matemàtiques.

Enguany la dotació del premi Poincaré s'ha incrementat respecte a l'any anterior. Els premis per als guanyadors han estat en forma de vals-obsequi bescanviables de 800, 500 i 300 euros, respectivament, per al primer, segon i tercer premis, i de 200 euros en tots els casos per als tutors. Les mencions han rebut un premi de 100 euros per a l'estudiant i de 100 euros per al tutor. Els premis concedits són els següents: primer premi: Aniol Garcia i

Serrano, «Els grafs: xarxes, camins i connexions. De la matemàtica discreta a la realitat», Escola Vedruna-Malgrat de Mar; segon premi: Pablo Nicolás Martínez, «Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas», IES Juan Carlos I, Múrcia, i tercer premi: Jana Farran Oliva, «Com s'escriu òrbita?», INS Antoni Torroja, Cervera.

Pel que fa a les competicions i concursos que organitza o allotja l'FME, cal fer esment de la fase catalana de l'Olimpíada Matemàtica Espanyola, a mitjan desembre de l'any passat, la Copa Cangur el gener d'enguany, la 4a edició del Barcelona Tech-MathContest, el mes de febrer, i la XXII Prova Cangur, el 16 de març. També cal fer notar que els dies 5, 6 i 7 de maig va tenir lloc la Barcelona Mathematical Competition for University Students, amb participació d'estudiants procedents de tot l'Estat, de Bèlgica i d'Hongria. En aquesta competició els estudiants de l'FME van ocupar moltes de les primeres posicions.

## Vida acadèmica

En aquest àmbit cal destacar les eleccions per a la renovació de la Junta de Facultat de l'FME, el 14 de març d'enguany, que incorpora els canvis derivats de la nova estructura departamental de la UPC.

Pel que fa a conferències i seminaris, esmentarem en primer lloc la xerrada «Estadística i anàlisi de l'esport: noves oportunitats en el món professional» organitzada el mes de març per la Societat Catalana d'Estadística i a càrrec de Javier Peña López, director del Centre d'Estudis en l'Esport i Activitat Física (CEEAF) i membre del Grup d'Investigació del Rendiment Esportiu de la Universitat de Vic, i de Martí Casals Toquero, expert en bioestadística, investigador del Servei d'Epidemiologia de l'Agència de Salut Pública de Barcelona i professor associat de bioestadística a la Facultat de Ciències de la Salut de la Universitat de Vic.

Una altra conferència ha estat «Si és conveixa ha de ser simple», a càrrec d'Andreu Mas-Colell, professor de la Universitat Pompeu Fabra. Aquesta conferència s'inscriu dins el cicle Col·loquis FME-UPC, organitzat per l'FME i el Departament de Matemàtiques de la UPC.



En aquesta xerrada el professor Mas-Colell va parlar de l'anomenat «equilibri correlacional», una generalització de l'equilibri de Nash, així com de l'aplicació dels mètodes de la teoria de la convexitat per obtenir resultats en aquests equilibris.



Finalment volem recordar «Ones gravitatòries: el so de l'espai-temps», a càrrec de Carlos F. Sopuerta, investigador principal de diversos projectes de recerca del Grup d'Astronomia Gravitacional de l'Institut de Ciències de l'Espai (CSIC-IEEC) i membre de l'equip científic de la missió LISA Pathfinder de l'Agència Espacial Europea (ESA). La conferència s'emmarca dins del programa d'activitats de la investidura com a doctor *honoris causa* de l'astrofísic nord-americà Kip S. Thorne. Al llarg de tot el curs l'FME ha acollit dos cursos de la BGSMath: «Random Discrete Structures», del 22 de maig al 16 de juny, i «Arithmetic properties of curves of small genus», del 14 al 24 de febrer. Entre juny i juliol

## Activitat del MMACA a Tarragona

Ramon Nolla i Ramon Masip  
Institut Pons d'Icart

Primer diumenge de primavera al Moll de Costa a Tarragona. El llevat fresc ens porta la salabor del mar. Volíem caminar fins a l'antic Far de la Banya, al dic de Llevant, però les cames ens han desviat més cap a l'est, cap al barri pescador del Serrallo. Des d'allí

també ha presentat els cursos de la XI Summer School MESIO UPC-UB.

## Orientació professional

Com ja és costum, els mesos d'abril i maig s'han dut a terme diverses activitats d'orientació professional per als estudiants dels darrers cursos de l'FME. En primer lloc la sessió d'orientació professional «10 tips per preparar i triomfar al Fòrum FME-Empresa», a càrrec d'Alumni UPC, una sessió dinàmica i participativa, amb simulacions d'entrevistes i presentacions personals. També el tradicional Fòrum FME-Empresa: una oportunitat per a estudiants i titulats de l'FME de tenir contacte directe amb empreses que venen amb ofertes de feina, possibilitats de col·laboració i convenis. En l'edició d'aquest any, celebrada el 26 d'abril, han participat un total de 23 empreses. Finalment, la Jornada I+D MESIO UPC-UB 2017, que permet a empreses i entitats donar a conèixer els seus propis projectes d'R+D als estudiants del Màster Interuniversitari d'Estadística i Investigació Operativa UPC-UB i oferir-los la possibilitat de participar-hi mitjançant un treball final de màster. Enguany la jornada s'ha fet el 10 de maig, amb la participació de nou empreses que van oferir un total de 14 projectes.

## Enllaços

De totes les activitats anteriors podeu trobar més informació al web de la facultat <http://fme.upc.edu/ca>.

També podeu seguir-nos a Facebook <https://www.facebook.com/fme.upc> i Twitter [https://twitter.com/FME\\_UPC](https://twitter.com/FME_UPC).

accentua el groc daurat de la seva superfície. Anem deixant enrere passejants, nens i nenes que s'empaiten. A la nostra dreta, les naus, avui convertides en grans sales culturals dels Tinglados i Refugis. A l'esquerra una dotzena de grans velers i iots suren amb la flota pesquera més endavant, al fons. Llavors, tombant a la dreta, ens trobem davant per davant del cartell de l'exposició «Experiències matemàtiques» del MMACA a Tarragona, penjat de la façana del Tinglado 4. Obert del 16 de febrer al 7 de maig de 2017. A l'altre costat del carrer, donem l'esquena a l'edifici del Refugi 2, on es troba el Museu del Port de Tarragona i on s'han programat paral·lelament dues conferències complementàries.



Recinte de l'exposició. Tinglado 4 del Moll de Costa

Des de l'interior ens arriba una remor d'intensitat baixa i entrem. Una cinquantena de persones, entre parelles, famílies amb nens, petits grups i algun observador solitari, manipulen, llegeixen, toquen els reptes que s'hi presenten. Un nen al nostre costat construeix cubs i tetraedres amb peces imantades. Junts, fem el desplegament pla del rombicuboctaedre, llavors l'agafa amb dos ditets de cada mà per dues arestes i, suaument, el separa de la taula. A poc a poc les peces es van ajuntant i, *voilà*, la figura queda muntada. La seva cara resplendent ho diu tot. Més enllà, petits grups munten amb més o menys èxit diversos trencaclosques, desxifren il·lusions òptiques, es fan fotografies a l'habitació d'Ames, aixequen l'arc catenari, etcètera.

Aquest va ser l'entorn i l'ambient de l'espai que el MMACA va presentar a la nostra ciutat, iniciativa encapçalada per l'Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals (APMCM). El seu equip, amb José Rey Cano com a artífex a l'hora d'obtenir

suports, va preparar una exposició que grans i petits recordaran per la relació amigable i engrescadora que proposava amb les matemàtiques. Les entitats, els organismes i les institucions que van col·laborar en el MMACA van ser, a més de l'APMCM, el Port de Tarragona, l'Ajuntament de Tarragona i el Servei Educatiu del Tarragonès.

El dia 16 de febrer, Sílvia Rodes, directora dels Serveis Territorials d'Ensenyament a Tarragona, i Gabriel Mas, director del Servei d'Atenció al Client i de relacions port-ciutat del Port de Tarragona; Àngel Xifré, president de l'APMCM, i Josep Rey Nadal, president del MMACA van inaugurar l'exposició. Després d'unes paraules encoratjadores, els assistents vam gaudir de la presentació dels mòduls de l'exposició que va fer el professor i membre del MMACA Sergio Belmonte.

L'empresa Còdol Educació va gestionar de manera impecable, durant gairebé tres mesos, la inscripció de les escoles, col·legis i instituts a les activitats de l'exposició amb acompanyament d'educadors que van dur a terme una tasca excel·lent. Una idea de l'èxit aconseguit la va proporcionar la xifra de més de quatre mil infants inscrits, dels centres de la demarcació i un total de més de vuit mil visitants quan s'hi sumava el públic general. Aquestes dades es completen amb una elevada valoració global de l'activitat de 4,9 punts sobre 5, comptabilitzats a partir de l'avaluació feta per un 98,56% dels participants.



Alumnat fent front als reptes de l'exposició

Els centres participants van aprofitar l'experiència per organitzar activitats d'aula al voltant dels diferents reptes. Una prova d'això la tenim en el nostre centre, que hi va inscriure tres-cents alumnes. L'alumnat, per grups o individualment, va triar algun dels reptes que els havia cridat més l'atenció i van elaborar un

treball escrit, fent-ne la descripció i proposant i contestant preguntes a través del repte. També es van incorporar propostes del professorat per ampliar l'abast dels reptes. Un primer exemple el trobem en la proposta d'estudiar la manera de dissenyar un triangle equilàter per construir el trenques dels tres triangles equilàters. I un segon exemple, en la d'ampliar l'estudi del repte d'empaquetament de cilindres. Paral·lelament a l'exposició, durant els dos primers mesos, es van organitzar dues xerrades complementàries (<https://goo.gl/OePrU0>).

La primera la va impartir Anton Aubanell i portava per títol «Una passejada per l'origen del nostre calendari». Pas a pas, va guiar-nos magistralment pel camí que va conduir, al llarg de la història, a la resolució de les dificultats sorgides de l'intent d'ajustar l'any civil a la durada de l'any real. En paraules textuais seves, «els calendaris són les solucions, més o menys aproximades, que es donen a aquest problema en diverses cultures i en diversos moments».

La segona la van presentar Ramon Masip i Ramon Nolla, titulada «Matemàtiques a l'institut. Una bella eina per a una lectura del món». En aquesta xerrada es va posar l'accent en el paper divulgador-motivador-formador aprenent del professorat de cara a fer lectures del món des de l'òptica matemàtica, i en una anàlisi del component estètic d'aquesta matèria com a punts de partida per fer matemàtiques a l'institut. Aquests punts es van concretar

en una presentació d'activitats desenvolupades amb l'alumnat.

El dia de la cloenda, el diumenge 7 de maig, José Rey Cano va conrear el gust per fer matemàtiques en una xerrada dirigida especialment a les famílies. Va compartir les preguntes que li agradava fer-se amb mares, pares, criatures, que van gaudir dels jocs que els va proposar amb daus, cartes, papiroflèxia, construccions geomètriques i bombolles de sabó. Sota el títol «M'agrada fer-me preguntes», va fer de guia en el camí de la descoberta dels nombres i les formes que s'amagaven en aquestes experiències.



«M'agrada fer-me preguntes», amb José Rey

Finalment, volem agrair la bona acollida de l'alumnat i el públic de la demarcació a les activitats de l'exposició i convidem els lectors a fer extensiva la crida a fer-se amics del MMACA, a tot el públic que es beneficia de la seva activitat i que ha descobert que les matemàtiques poden agradar (<http://www.mmaca.cat/>).

## José Rodellar, nou director del Departament de Matemàtiques de la UPC

José Rodellar  
Universitat Politècnica de Catalunya

El Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) es va crear l'octubre del 2015, resultat de la fusió dels anteriors quatre departaments de matemàtica aplicada, amb trenta anys de recorregut. Després d'un període inicial amb la direcció del professor Oriol Serra, es van celebrar les primeres eleccions al gener del 2017 i es va donar pas a un equip de direcció encapçalat per mi mateix i del qual formen part: Marta Casanellas, Andrés

Encinas, Jordi Guàrdia, Sebastià Martín i Jordi Saludes.

Som un departament gran en termes de recursos humans, amb una plantilla de professorat de gairebé 200 persones. Tenim la responsabilitat de la docència matemàtica en la majoria de les titulacions de la UPC, i el nostre personal acredita un gran nivell d'acceptació i d'implicació per part dels estudiants i dels centres docents.



Al departament hi conviuen una vintena de grups de recerca que estan ben situats i són reconeguts en els seus àmbits científics, en el context de les matemàtiques i de diverses àrees científiques i tecnològiques properes, i un bon nombre de professorat col·labora en aquests i en altres grups. Una quinzena d'investigadors joves amb diverses figures de contractació i una vintena de becaris de doctorat completen una plantilla d'investigadors del departament que contribueix a fer que les matemàtiques de la UPC tinguin una posició prou alta en els indicadors internacionals de la recerca.

Els principals reptes del departament en els anys vinents es poden articular en les línies següents:

- Consolidar una estructura docent amb una relació estreta i constructiva amb els centres

on som presents. Els nostres alumnes són majoritàriament estudiants de diverses especialitats d'enginyeria en què les matemàtiques tenen un paper fonamental que hem de saber transmetre amb adaptació als objectius docents de les titulacions.

- Assolir la promoció i la incorporació de nou personal docent i investigador per assegurar una plantilla sòlida, estable i amb projecció per als anys vinents.
- Enfortir els nostres grups de recerca, potenciar la seva consolidació i el desenvolupament de projectes conjunts, i treballar perquè es reconeguin i visualitzin les seves tasques i resultats.
- Afavorir la mobilitat del nostre personal i la incorporació d'investigadors i doctorands, aprofitant els programes de les diferents institucions i organitzacions que promouen i financen la recerca.
- Afavorir els lligams amb altres departaments, centres i entitats de la UPC i arreu el món, amb la participació del nostre personal en àrees d'interès mutu.
- Fomentar la implicació del departament i els seus membres en la societat, especialment en àmbits relacionats amb l'ensenyament, la ciència, la tecnologia, la cultura i la cooperació.

## Renovació a la junta de FEEMCAT

Manel Sol

President de la FEEMCAT

El mes de gener passat es va renovar la junta de la FEEMCAT d'acord amb el que estableixen els estatuts de la federació. L'equip d'ADEMGI, format per Victòria Oliu, Sílvia Margelí i Raül Fernández, va ser substituït per l'equip format per Manel Sol, Charo Martín i Francesc Campos, tots ells d'APaMMs.

Des de l'any 1994 que es va constituir la FEEMCAT fins ara, el volum d'activitats que ha anat assumint no ha fet més que

créixer. En el moment actual són una quantitat d'iniciatives considerable. Quan acceptem la responsabilitat de fer-nos càrrec de la federació som conscients del repte que això suposa. Algunes de les activitats que desenvolupa estan molt consolidades i tenen una certa inèrcia, com per exemple el concurs de resolució de problemes Fem Matemàtiques, en el qual aquest any han participat prop de 15.000 alumnes de sisè de primària, primer i segon d'ESO i que

té una estructura ben contrastada. Adreçat a alumnes de quart d'ESO, es porta a terme el programa Anem x + Matemàtiques, amb un bon nivell d'acceptació i que encara comprovem com creix cada any.

També mantenim moltes col·laboracions amb la SCM i amb el Departament d'Ensenyament. Amb la SCM hem de destacar la revista *Noubiaix*, que editem conjuntament, però també altres activitats com ara Problemes a l'Esprint. La relació que establím amb el Departament d'Ensenyament de la Generalitat també és intensa i sense el seu suport no es podrien tirar endavant moltes de les activitats que s'estan fent. Es mantenen reunions periòdiques amb els seus representants i prenen part en molts dels actes que organitzem.

Hi ha altres col·laboracions més àmplies, en el sentit que hi participen més agents socials, com ara el programa Estalmat o Bojos per les Matemàtiques.

Amb la FESPM (Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas) mantenim col·laboracions a fi de coordinar els temes que ens afecten a tots, de formació, jornades com les JAEM, normatius i canvis legislatius en l'educació matemàtica.

Especial menció s'ha de fer a la col·laboració que mantenim amb les associacions de professors de matemàtiques de parla catalana, que són la SCM, la de les illes Balears SBM Xeix i la de la Comunitat Valenciana, SEM Al-Khwarizmi. Aquesta col·laboració es concre-

ta en l'organització d'una jornada conjunta a finals de setembre o principi d'octubre, una trobada conjunta a final de l'hivern i en el lliurament del premi Maria Antònia Canals a la innovació educativa. A més, hi ha un grup de treball per estudiar i mantenir viu el record i els llocs que van tenir protagonisme en la mesura del meridià verd per definir el metre.

Hi ha dues qüestions a les quals haurem de dedicar un esforç especial. La primera, millorar la visibilitat de les tasques desenvolupades a l'entorn de l'educació matemàtica. La segona es refereix a l'augment del nombre de professors associats per continuar mantenint aquesta presència en el món de l'educació matemàtica.

El juliol del 2016 es va celebrar amb molt d'èxit el C2em (Congrés d'Educació Matemàtica) amb la idea de convocar-lo cada quatre anys. Per nosaltres, és sens dubte el repte més ambiciós que tenim plantejat. Tenint en compte que el nostre mandat arriba fins al gener del 2020, no ens correspondrà estar al davant del congrés quan arribi el moment de celebrar-lo, però sí que haurem de fer tota la feina inicial perquè pugui ser una realitat. En som ben conscients i ho intentarem amb ganes.

Creiem que hem donat una visió de conjunt de les principals tasques que ens ocuparan durant aquest període de tres anys que estarem al capdavant de la FEEMCAT.

## Activitats

### LIII Olimpíada Catalana de Matemàtiques

José Luis Díaz-Barrero  
Universitat Politècnica de Catalunya

Durant els dies 16 i 17 de desembre de 2016 s'ha celebrat simultàniament a Tarragona, Lleida, Girona i Barcelona la LIII Olimpíada Catalana de Matemàtiques (primera fase de l'Olimpíada Matemàtica Espanyola 2017)

(OCM). L'organització d'aquesta edició de l'OCM ha estat a càrrec de la Comissió d'Olimpiades de la SCM. Se'n pot trobar informació detallada al web: <http://www.cangur.org/olimpiades/53oli>.

El més important, sense cap dubte, han estat els participants que han competit per formar part dels equips que representaran Catalunya al concurs final de l'Olimpiada Matemàtica Espanyola (OME) a Alcalá de Henares el març del 2017. La competició ha consistit en la resolució de sis problemes en dues sessions, els dies 16 i 17. El jurat estava format per Agustí Reventós Tarrida, president, de la Universitat Autònoma de Barcelona; Anton Aubanell Pou, vocal, del Museu de Matemàtiques de Catalunya, i Juan José Rué Pernas, secretari, de la Universitat Politècnica de Catalunya. Aquest jurat s'ha encarregat de proposar la prova, elaborar els criteris de correcció, puntuar les solucions presentades pels concursants i proclamar els guanyadors. En nom de la SCM volem agrair-los l'excel·lent treball que han dut a terme de manera tan generosa.

Els problemes proposats han estat els següents:

1. De quantes maneres diferents es pot expressar el nombre  $n = 3.499.200$  com a producte de tres factors? Les representacions que es diferenciïn en l'ordre dels factors es consideraran diferents.
2. Siguin  $a, b, c, d$  nombres reals donats amb  $c$  i  $d$  positius, i siguin  $x, y$  nombres reals positius, de manera que  $0 < x \leq c$ , i  $0 < y \leq d$ . Trobeu els valors de  $x, y$  que fan mínima l'expressió següent:

$$\sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d-y)^2}.$$

3. Sigui  $ABCD$  un quadrilàter convex (amb els vèrtexs ordenats en sentit antihorari).

Dividim el costat  $AB$  en  $n > 1$  parts iguals mitjançant els punts  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  (situats de  $A = X_0$  a  $B = X_n$ , en què  $X_1$  és el més proper a  $A$ ) i dividim el costat  $CD$  en  $n$  parts iguals mitjançant els punts  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$  (situats de  $D = Y_0$  a  $C = Y_n$ , en què  $Y_1$  és el més proper a  $D$ ).

Considerem els segments  $X_i Y_i$  i el segment  $PQ$ , on  $P$  és el punt mitjà del segment  $AD$  i  $Q$  és el punt mitjà del segment  $BC$ . Denotem  $Z_i$  el punt d'intersecció de  $PQ$  amb  $X_i Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , amb  $P = Z_0$  i  $Q = Z_n$ .

Considerem els  $2n$  quadrilàters:

$$\begin{aligned} X_i X_{i+1} Z_{i+1} Z_i, & \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ Z_i Z_{i+1} Y_{i+1} Y_i, & \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Demostreu que la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs  $A$  i  $C$  és igual a la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs  $B$  i  $D$ .

4. Siguin  $OA, OB$  dos radis d'una circumferència de centre  $O$ . Des d'un punt  $P$  d'aquesta circumferència es tracen perpendiculars a les rectes  $OA$  i  $OB$ . Siguin  $R, S$  els peus d'aquestes perpendiculars. Demostreu que la distància  $RS$  no depèn de la posició del punt  $P$  sobre la circumferència.
5. Sigui  $\mathcal{A}$  el conjunt dels nombres enters positius  $n$ , de manera que:

$$n | 2^n + 1.$$

(Equivalentment, que  $2^n + 1$  és múltiple de  $n$ .)

- a) Demostreu que per a tot nombre enter  $k \geq 0$ ,  $3^k$  pertany a  $\mathcal{A}$ .
- b) Quins nombres primers pertanyen a  $\mathcal{A}$ ?



El jurat va adoptar l'acord d'atorgar els premis següents:

**Primers premis:** Jordi Rodríguez Manso, Aula Escola Europea (Barcelona), segon de batxillerat; Weijie Chen, Institut Montsacopa (Olot), segon de batxillerat, i Jan Olivetti Auladell, Aula Escola Europea (Barcelona), segon de batxillerat.

**Segons premis:** Aleix Torres Camps, Bellloc del Pla (Girona), primer de batxillerat; Pau Autrand Caballero, Aula Escola Europea (Barcelona), segon de batxillerat, i Jordi Vilà Casadevall, Institut Jaume Vicens Vives (Girona), segon de batxillerat.

**Tercers premis:** Edgar Moreno Martínez, Institut Jaume Vicens Vives (Girona), primer de batxillerat; Adrián Rodríguez Muñoz, American School of Barcelona (Esplugues de Llobregat), segon de batxillerat, i Adrià Vilanova Martínez, St. Paul's School (Barcelona), segon de batxillerat.

El concursant Jordi Rodríguez Manso ja va rebre distinció en la fase catalana de les

olimpíades 51a i 52a quan cursava, respectivament, quart d'ESO i primer de batxillerat, i Jan Olivetti Auladell ja va obtenir distinció en la fase catalana de l'Olimpíada 52a quan cursava primer de batxillerat.

El jurat va fer constar en acta la seva felicitació al concursant Jordi Rodríguez per haver obtingut la puntuació màxima en tots els problemes.

## Abel in Barcelona

Iolanda Guevara i Albert Avinyó  
Junta de la SCM

El 16 de gener passat, i només per un dia, Barcelona es va convertir en la capital mundial de les matemàtiques. El motiu va ser la reunió en aquesta ciutat del comitè Abel. Considerat el Nobel de les matemàtiques, el premi Abel és el guardó que atorga anualment l'Acadèmia Noruega de les Ciències i les Humanitats a un o més matemàtics per contribucions científiques excepcionals en el seu camp. Per fer-ho, l'acadèmia es basa en la recomanació d'un comitè format per cinc experts de renom internacional, entre els quals actualment hi ha Marta Sanz-Solé, catedràtica de Probabilitat i Estadística de la Universitat de Barcelona i membre de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC). També formen part d'aquest comitè John Rognes, de la Universitat d'Oslo (Noruega); Luigi Ambrosio, de l'Escola Normal Superior de Pisa (Itàlia); Marie-France Vignéras, de l'Institut de Matemàtiques de Jussieu, a París (França), i Ben J. Green, de la Universitat d'Oxford (Regne Unit).



Des de fa uns quants anys, i amb l'objectiu de promoure les matemàtiques i el premi arreu del món, la reunió anual ordinària del comitè Abel on es decideix el guanyador del premi es convoca en una ciutat fora de Noruega. Aquest any, i a proposta de Marta Sanz-Solé, aquesta reunió es va dur a terme a Barcelona.

Coincidint amb aquesta reunió, i amb el suport de l'Acadèmia de les Ciències i Lletres de Noruega, la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) va organitzar una jornada, a la seu de l'IEC, anomenada «Abel in Barcelona».

El primer acte d'aquesta jornada va ser una roda de premsa a la sala Puig i Cadafalch de l'IEC, on van assistir una vintena de periodistes d'àmbit científic de la majoria de mitjans de comunicació catalans. Després de la benvinguda donada pel president de l'IEC, Marta Sanz-Solé va explicar la importància del premi Abel i quina era la tasca del comitè que aquell dia es reunia a Barcelona. A continuació, Xavier Cabré va presentar el matemàtic canadenc Louis Nirenberg, especialista en equacions en derivades parcials, guanyador, juntament amb John F. Nash, del premi Abel 2015 i considerat un dels gegants de les matemàtiques del segle XX. Després del visionat d'un vídeo on es va poder veure que el professor Nirenberg, malgrat la seva avançada edat i els seus problemes de mobilitat, encara va cada dia a treballar al seu despatx de l'Institut Courant de la Universitat de Nova York, Xavier Cabré va fer-li unes quantes preguntes sobre la seva trajectòria professional i sobre la seva opinió de la importància

de l'aplicació de les matemàtiques en altres ciències. Una de les frases més curioses que va pronunciar el professor Nirenberg va ser que «les matemàtiques es fan xerrant». La roda de premsa va concloure amb les preguntes dels periodistes als membres de la taula. Algunes d'aquestes van ser: «Quina és la diferència entre el premi Abel i les medalles Fields?», «Per què Barcelona és la ciutat escollida per dur a terme la reunió del comitè Abel?», «Quines mesures s'han de prendre a fi que les matemàtiques siguin més properes a la gent jove?».



Cal destacar que gràcies al gran treball del comitè organitzador aquesta roda de premsa, i en general tota la jornada, van tenir un gran ressò en els mitjans audiovisuals i escrits del país:

- **TV3**
- **El Punt Avui**
- **Ara**
- **BTV Ràdio**



Poc després del migdia es va iniciar el simposi matemàtic pròpiament dit. Aquest acte va constar de tres xerrades. La primera la va dur a terme el professor Nirenberg, titulada «Some simple remarks on solving nonlinear problems», en què va fer, amb el seu estil tan característic, tot un viatge per algunes de les tècniques variacionals més emprades per demostrar l'existència i la regularitat de diversos problemes de valor inicial associats a equacions en derivades parcials. En particular, es va estendre en la demostració i la gran utilitat del principi variacional d'Ekland.



Després del dinar, els conferencians van ser dos membres del comitè Abel actual. En primer lloc, el professor Luigi Ambrosio de la Scuola Normale Superiore de Pisa va fer una dissertació relacionada amb l'anàlisi funcional que portava per títol «New developments on calculus in metric spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below», en què va explicar alguns resultats recents relacionats amb la formulació feble d'equacions associades al flux de la calor en espais de mesures amb unes propietats adients. Per finalitzar, el professor Ben Green de la Universitat d'Oxford va oferir la xerrada que portava per títol «Higher-order Fourier Analysis», en què de manera molt interessant, i també ben instructiva, va mostrar alguns vincles fonamentals entre la teoria de nombres i l'anàlisi de Fourier.

La cloenda de la jornada va ser un acte protocol·lari i un sopar a peu dret al pati de l'IEC que va oferir l'ambaixada de Noruega.



## Presentació de la *Història de la matemàtica*, de Josep Pla i Carrera

Sebastià Xambó Descamps

Professor emèrit del Departament de Matemàtiques de la UPC

L'acte s'havia programat a la sala Nicolau d'Olwer de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC), a les 19 hores del dilluns 23 de gener, però l'extraordinària concurrència de públic obligà a improvisar-ne el trasllat a la sala Pere i Joan Coromines. La raó principal d'aquest interès l'atribueixo a la singularitat d'un programa primordial per a la nostra ciència i cultura.



Josep Pla i Pilar Bayer (Crèdit: Iolanda Guevara)

L'acte fou presidit per la Dra. Pilar Bayer, membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'IEC, i directora del projecte «Història de la matemàtica grega» en el qual s'insereix una part del vast disseny del Dr. Pla d'escriure i publicar la monumental *Història de la matemàtica. Resultats, textos i contextos*. L'objecte de l'acte era presentar dos volums d'aquesta empresa. El primer [1] s'originà com a projecte d'emèrit de l'autor i fou penyora del projecte complet. El segon [2] és el primer volum dels cinc previstos per a la matemàtica grega. De tots aquests detalls, i de molts altres, en donà compte la Dra. Bayer en la seva presentació. De l'autor, va destacar els seus més de trenta anys com a professor d'història de la matemàtica, el seu captament metodològic, la seva extensa i polifacètica obra, i la seva estima de la llengua.

La presentació pròpiament dita consistí en un acompanyament oral de l'autor a un conjunt de més que quaranta transparències (pàgines). No puc deixar de citar aquí una de

les primeres, un parèntesi en què «individualment i humilment dedico aquesta presentació a tots i cadascun dels polítics catalans elegits democràticament assetjats pels tribunals espanyols pel fet d'exercir el seu compromís polític» i que titulà «Per la democràcia. Defensem les nostres institucions».

Tot seguit explicà l'estil dels llibres, comparant-lo al d'altres obres existents, però al meu parer hom no se'n pot fer una idea més exacta sense llegir el llarg preàmbul d'[1] i la introducció a [2]. El gruix de la presentació van ser «tres exemples per explicar quina és l'originalitat d'aquesta obra». En el primer exemple (cinc pàgines) fou un resum de la sorprenent anàlisi de la tauleta *Plimton 322* (vegeu la instantània de Iolanda Guevara). En detall, està explicat a la subsecció 2.9.2 de [1], pàgines 249–257. El segon exemple (set pàgines), titulat «El *Menó* de Plató. La reminiscència segons Sòcrates», correspon a les seccions 4.1 i C.1, pàgines 268–276 i 512–525, de [2]. I el relat del tercer exemple (disset pàgines), titulat «Per què no quadrem el cercle?», l'inicià amb una referència a dos problemes del *Papir de Rhind* (com el murri escriba Ahmès calculava la superfície d'un camp circular donat el diàmetre; [1], secció A.1) i prosseguí amb una subtil i complexa anàlisi de diversos textos matemàtics i filosòfics relatius a la qüestió i que es poden trobar a [2], apèndixs B i C.

Fou un aplec d'una intensitat com no es produeix gaires vegades. Una iniciativa d'aquesta envergadura porta a la memòria epopeies d'altri, com ara les de Joan Coromines (l'atzar volgué que la celebració fos en una sala que porta el seu nom). Hom pot augurar, per l'estil i contingut, per la profunditat i extensió, que en la *Història de la matemàtica* hi trobaran valors insospitats moltes persones i institucions de cercles que en principi semblen mantenir poca comunicació amb els de les matemàtiques i la seva història. Al gaudi intel·lectual de llegir-la l'acompanyarà el premi de participar en la consolidació d'aquest intercanvi necessari.

## Referències

- [1] J. Pla. «Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia. Resultats, textos i contextos». IEC, juliol 2016. LXV + 427 pàgines.
- [2] J. Pla. «Història de la matemàtica. Grècia I (de Tales a Plató i Aristòtil)». IEC, juliol 2016. XIV + 781 pàgines.

## Dissabte Transfronterer de les Matemàtiques a l'Alt Empordà

Jaume Agudé  
UAB

El primer dissabte de febrer de cada any (ja en fa sis), un centenar i mig d'alumnes de l'Alt Empordà i les comarques properes es troben a Figueres per participar en una activitat de matemàtiques que es coneix com el «DITMAE». Potser no és un acrònim gaire ben trobat, però vol dir «Dissabte Transfronterer de les Matemàtiques a l'Alt Empordà» i la paraula *transfronterer* fa referència a la presència (minoritària, però persistent i testimonial) d'un grupet d'alumnes de la Catalunya Nord que, excepcionalment, estudien l'assignatura de matemàtiques en català.



La iniciativa va néixer del desig de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer d'organitzar activitats de difusió de les matemàtiques també en l'àmbit de l'ensenyament preuniversitari. Aquesta fundació que té com a finalitat principal l'estímul de la recerca matemàtica (el premi internacional Ferran Sunyer i Balaguer, les borses de doctorat...) va voler incidir també en la promoció de les vocacions matemàtiques entre els estudiants joves amb una activitat que es relacionés amb la ciutat de Figueres, on va néixer l'il·lustre matemàtic.

El DITMAE va començar el 2012 gràcies a la conjunció d'interessos entre tres institucions:

la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer, la Fundació Princesa de Girona (que té un ampli programa d'educació del talent emprenedor) i l'Ajuntament de Figueres (que ha sabut incorporar a la ciutat el llegat de Ferran Sunyer). Des d'aquell moment, el DITMAE s'ha anat consolidant i ampliant. Les altres dues institucions que li donen suport són la Universitat Autònoma de Barcelona i el Servei Educatiu de l'Alt Empordà.

## El Dissabte d'enguany

Hem ofert als estudiants quatre tallers (tres de batxillerat i un de quart d'ESO) amb una presència total de 140 alumnes i 35 professors de 20 centres. Cada taller consisteix en una xerrada introductòria seguida d'un taller competitiu (molt competitiu!) declara uns guanyadors que reben uns determinats premis. Simultàniament, els professors que acompanyen els seus alumnes han pogut participar en unes xerrades sobre modelització, emprenedoria i docència matemàtica: Lluís Albarracín (UAB) va presentar «Problemes de Fermi: una eina de modelització matemàtica a secundària» i Francisco Ferrer (Col·legi Santa Ana, Vilallonga) va explorar les possibilitats que ofereix el currículum de matemàtiques per generar projectes interdisciplinaris («STEAM») que estimulin la competència emprenedora.

Aquest any, els primers premis han consistit en un viatge dels alumnes premiats a Madrid (acompanyats pels seus professors) amb l'objectiu de visitar i conèixer el funcionament de l'empresa tecnològica CARTO, creada per Sergio Álvarez Leiva (premi FPdGi i nominat a la llista TR35 del MIT).



Els organitzadors del DITMAE tenim l'obligació de correspondre a l'entusiasme engrescador dels alumnes que hi participen (aquest entusiasme és la nostra millor recompensa) amb una oferta de tallers que presenti matemàtiques significatives, dinàmiques i molt atractives, allunyades del currículum escolar.

En l'edició 2017 el taller d'ESO tractava l'anàlisi de les estratègies matemàtiques dels jocs de taula i la seva relació amb la resolució de problemes i el treball col·laboratiu. El taller es titulava «De la matemàtica dels jocs al joc de la matemàtica» i el va impartir Jordi Deulofeu, de la UAB.

Per als estudiants de batxillerat hi va haver un taller titulat «Les matemàtiques del *Big Data*: de la genètica a Facebook» en el qual els alumnes van ser, per una estona, analistes de dades de Facebook, és a dir, van participar en les estratègies dels analistes de dades de les grans xarxes socials. Raquel Iniesta, investiga-

dora en farmacogenètica de malalties complexes al King's College de Londres, va ser qui va impartir aquest taller.

«L'infinit matemàtic i les seves paradoxes» és el títol del taller que va impartir Joan Bagaria (UB i ICREA) a uns alumnes que van gaudir aprenent que hi ha infinits més grans que altres, que es poden fer operacions aritmètiques amb ells i que hi ha afirmacions (com la hipòtesi del continu) que no poden ni demostrar-se ni refutar-se.

En un altre taller, els alumnes es van enfrontar a preguntes com aquestes: es poden mesurar, els colors?, quina percepció en tenim?, què és el que veiem i què és el que ens passa desapercebut?, veiem el mateix que el que registra la càmera del nostre mòbil? És a dir, van treballar en la teoria matemàtica de les diverses representacions dels colors (incloent l'infraroig) fent fotografies, mesurant els seus colors i aprenent a transformar les coordenades del color d'un espai a un altre. El professor del taller va ser Pere Brunet, de la UPC.

Més enllà de les institucions que hi donen suport i de l'equip que l'organitzem, una peça important del DITMAE que no vull oblidar en aquesta nota la formen els monitors que col·laboren amb els tallers i que són estudiants de matemàtiques o de matemàtiques i física a l'Autònoma.

La pàgina del DITMAE és [ditmae.cat](http://ditmae.cat).

## Primera edició del premi Noether (2016)

Enric Ventura

Vicepresident de la SCM

El dilluns 27 de febrer de 2017 va tenir lloc, a la sala Prat de la Riba de la seu central de l'IEC, l'acte de lliurament de la primera edició del premi Noether (2016) de la Societat Catalana de Matemàtiques.

El premi Noether és un nou guardó atorgat per la Societat Catalana de Matemàtiques destinat a premiar els millors treballs de fi de grau dels estudiants de matemàtiques de les universitats catalanes. Des de l'últim canvi de pla d'estudis, tots els estudiants de matemàtiques, durant el seu últim any de carrera

han d'escriure i defensar un treball de fi de grau sobre un tema de matemàtiques de la seva elecció. Pot ser des d'una variació o ampliació d'algun tema estudiat en alguna assignatura del grau, fins a un primer treball d'iniciació a la recerca.

A la nostra comunitat ja tenim ben instaurats diversos guardons per premiar els millors treballs d'estudiants de diversos nivells: les universitats atorguen premis als treballs de batxillerat (en general o per temes), el premi Galois reconeix el millor treball d'iniciació a

la recerca (l'antiga tesina), el premi Teixidor guardona la millor tesi doctoral, etcètera. A causa de la seva relativa novetat, encara no hi havia cap premi dedicat als treballs de fi de grau. El curs passat, des de la Junta de la SCM vam pensar que seria una bona iniciativa d'instaurar-ne un, i vam convocar la primera edició del premi Noether, amb el valor afegit de no ser una iniciativa interna de les universitats sinó de concedir-lo a escala de tot Catalunya: tots els estudiants de matemàtiques de la UB, UAB i UPC hi han pogut presentar el seu treball de fi de grau i competir tots per un únic premi.

### Els premis en aquesta primera edició

En aquesta primera edició s'hi van presentar 25 treballs defensats a les respectives universitats durant la passada primavera i tardor del 2016. El jurat nomenat a tal efecte va estudiar-los i va decidir els que mereixien ser premiats d'acord amb les bases del concurs. Abans de dir els noms, deixeu-me fer esment d'algunes de les paraules del jurat que figuren a l'acta de lliurament dels premis: «Els membres del jurat volem que consti la magnífica impressió que ens han fet la pràctica totalitat dels treballs presentats... Ens congratulem que els graus en Matemàtiques de les universitats catalanes produeixin en un breu període de temps tants titulats amb l'excel·lent nivell que es fa palès als seus TFG». O més endavant també hi podem llegir: «El nivell de les matemàtiques és en general molt alt, arribant molt més lluny del que s'explica en els cursos del grau; en alguns casos l'estudiant s'inicia en temes propers a la recerca; molts treballs tenen una component computacional important; alguns són de caire multidisciplinari amb aplicacions a la física, biologia, economia, o altres ciències; hi ha aportacions originals, etcètera». Ens alegrem, doncs, d'aquest bon nivell general dels nostres estudiants en acabar els graus i, en nom de la SCM, animem tothom, estudiants i professors, a continuar treballant en aquesta bona direcció.

El jurat del premi Noether va atorgar dos primers premis *ex aequo* i una menció als treballs següents:

- premi Noether *ex aequo* al treball «Fractional Dimension of the Fractional Brownian

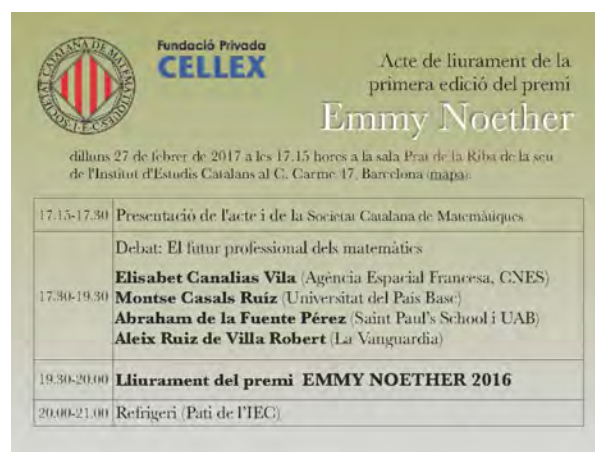
Motion» de l'estudiant Aitor Nicolàs Azemar Carnicero, del grau en Matemàtiques de la UAB, amb el professor Ferran Utzet com a tutor;

- premi Noether *ex aequo* al treball «Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture» de l'estudiant Óscar Rivero Salgado, del grau en Matemàtiques de la UPC, amb el professor Víctor Rotger com a tutor,
- menció al treball «Generalizations of the Hexagramme Mystique» de l'estudiant Sergi Baena i Miret, del grau en Matemàtiques de la UB, amb el professor Joan Carles Naranjo com a tutor.

A tots tres, la nostra més cordial felicitació.

### Acte d'entrega de premis

Com s'ha dit més amunt, l'acte de lliurament dels premis va ser el 27 de febrer, vegeu la convocatòria tot seguit



Com que l'acte s'adreçava a estudiants dels últims anys del grau, vam aprofitar l'ocasió per organitzar un debat sobre un dels temes que més els preocupen en aquesta etapa: les sortides professionals. Vam convidar quatre ponents joves per intentar il·lustrar les diferents sortides professionals de la carrera de matemàtiques: **Elisabet Canalias**, després de cursar el doctorat en temes de matemàtica aplicada, treballa per a l'Agència Espacial Francesa i ens va explicar quin és el paper dels matemàtics i de la seva formació específica en uns equips de treball interdisciplinaris, com els encarregats de dirigir la recent i espectacular missió espacial al cometa Gerasimenko, de la qual n'ha

estat un membre actiu. **Montserrat Casals**, actualment a la Universitat del País Basc, ens va explicar la seva trajectòria investigadora, des dels dubtes inicials que tenia en acabar la carrera fins a la seva posició actual amb un futur ben prometedori en el camp de la recerca.



**Abraham de la Fuente** ens va presentar la seva vocació de mestre, com l'havia anada forjant des que era estudiant, i la importància que té aquesta professió per al futur de la societat. Finalment, **Aleix Ruiz** va exposar la seva trajectòria professional, passant per una feina a *La Vanguardia* i actualment amb un càrrec destacat a Lidl; malgrat que no són feines directament relacionades amb les matemàtiques, sí que va manifestar de quina manera va treure profit de la seva formació matemàtica (incloent un doctorat en Anàlisi)

per arribar a tenir una personalitat emprenedora que li ha permès seguir una trajectòria professional de força èxit.

Després de les quatre presentacions es va obrir un debat amb el públic assistent que va durar més d'una hora. Al llarg del debat entre el públic (majoritàriament estudiants) i els quatre ponents va quedar palesa la preocupació de la gent jove pel seu futur professional; van sorgir els dubtes típics en relació amb què calia fer, si cursar un màster o no, si marxar a l'estranger o no, com decidir si una feina ens agrada, etcètera. Crec que l'ambient generat durant l'hora llarga que va durar el debat va contribuir positivament al procés que inevitablement han de seguir tots els nostres estudiants un cop acabada la carrera. No va resoldre el futur de ningú (no es tractava pas d'això, tothom ha de ser el protagonista únic del seu propi salt de la universitat al món laboral), però va permetre donar un missatge de confiança en el futur. Si més no, les estadístiques insisteixen, any rere any, que entre els titulats en matemàtiques l'atur és molt baix, i tots els ponents van insistir molt en el fet que la formació i les habilitats d'un matemàtic, en general, són molt bones comparades amb les d'un gran nombre d'altres professionals; aquest és el motiu principal d'èxit futur per als nostres estudiants. Això sí, les pors i els dubtes del temps de trànsit no les pot passar ningú més que cadascú com a protagonista de la seva pròpia història.

## LIII Olimpíada Matemàtica Espanyola

José Luis Díaz-Barrero  
Universitat Politècnica de Catalunya

Durant els dies 24 i 25 de març de 2017 s'ha celebrat a Alcalá de Henares (Madrid) el Concurs Final de la LIII Olimpíada Matemàtica Espanyola (OME). L'organització d'aquesta edició de l'OME ha estat a càrrec de la Universitat d'Alcalá de Henares, i de la Comissió d'Olimpiades de la RSME, coordinats per les professores María Gaspar i María Moreno, i del seu equip de col·laboradors. Se'n pot trobar informació detallada al web: <https://congresosalcala.fgua.es/ome2017>.

L'equip català estava format pels nou guanyadors de la LIII Olimpíada Catalana de Matemàtiques que va tenir lloc el passat mes de desembre del 2016.

**Primers premis:** Jordi Rodríguez Manso, Aula Escola Europea (Barcelona), segon de batxillerat, Weijie Chen, Institut Montsacopa (Olot), segon de batxillerat, i Jan Olivetti Auladell, Aula Escola Europea (Barcelona), segon de batxillerat.

**Segons premis:** Aleix Torres Camps, Bellloc del Pla (Girona), primer batxillerat; Pau Autrand Caballero, Aula Escola Europea (Barcelona), segon de batxillerat, i Jordi Vilà Casadevall, Institut Jaume Vicens Vives (Girona), segon de batxillerat.

**Tercers premis:** Edgar Moreno Martínez, Institut Jaume Vicens Vives (Girona), primer de batxillerat; Adrián Rodríguez Muñoz, American School of Barcelona (Esplugues de Llobregat), segon de batxillerat, i Adrià Vilanova Martínez, St. Paul's School (Barcelona), segon de batxillerat.

El més destacable han estat els 77 participants que, procedents de tot Espanya, han competit per formar part dels equips que representaran Espanya a l'Olimpíada Internacional (IMO) a Rio de Janeiro (Brasil) el juliol del 2017 i posteriorment a l'Olimpíada Iberoamericana a Bariloche (Argentina) el setembre del 2017. La competició ha consistit en la resolució de sis problemes en dues sessions, els dies 24 i 25. Un jurat format per matemàtics exolímpics i membres de la Comissió d'Olimpíades ha estat l'encarregat d'elaborar els criteris de correcció i d'assignar les puntuacions a les solucions presentades pels concursants. Com cada any tot això ha estat coordinat per la Comissió d'Olimpíades de la RSME, amb María Gaspar (presidenta) al capdavant. La nostra sincera felicitació i agraïment a tots ells per l'excel·lent treball que han dut a terme desinteressadament. També volem agrair la presència del president de la RSME i de totes les autoritats que ens han acompanyat a les cerimònies de lliurament de premis de l'Olimpíada i que han permès, amb el seu suport, que es pogués celebrar.

Els problemes proposats van ser els següents

1. Determineu el nombre de valors distints de l'expressió:

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2},$$

on  $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ .

2. Un traçador de punts mitjans és un instrument que dibuixa el punt mitjà exacte de dos punts assenyalats prèviament. Partint de dos punts a distància 1 i utilitzant només el traçador de punts mitjans, heu d'obtenir dos punts a una distància estrictament compresa entre  $\frac{1}{2017}$  i  $\frac{1}{2016}$ , traçant el nombre més

petit possible de punts. Quin és el mínim nombre de vegades que necessiteu utilitzar el traçador de punts mitjans, i quina estratègia seguiríeu per aconseguir el vostre objectiu?

3. Sigui  $p$  un primer senar i  $S_q = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}$ , on  $q = \frac{3p-5}{2}$ . Escrivim  $\frac{1}{p} - 2S_q$  en la forma  $\frac{m}{n}$ , on  $m$  i  $n$  són enters. Demostreu que  $m \equiv n \pmod{p}$ ; és a dir, que  $m$  i  $n$  donen el mateix residu en ser dividits per  $p$ .
4. Disposeu d'una fila de 2018 caselles, numerades consecutivament de 0 a 2.017. Inicialment, hi ha una fitxa situada a la casella 0. Dos jugadors  $A$  i  $B$  juguen alternativament; comença  $A$ , de la manera següent: en el seu torn, cada jugador pot fer avançar la fitxa 53 caselles, o bé fer retrocedir la fitxa dues caselles, sense que en cap cas es puguin sobrepassar les caselles 0 o 2.017. Guanya el jugador que col·loqui la fitxa a la casella 2.017. Quin d'ells disposa d'una estratègia guanyadora, i com hauria de jugar per assegurar-se que guanya?
5. Determineu el màxim valor possible de l'expressió:

$$27abc + a\sqrt{a^2 + 2bc} + b\sqrt{b^2 + 2ca} + c\sqrt{c^2 + 2ab},$$

en què  $a, b, c$ , són números reals positius, de manera que  $a + b + c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

6. En el triangle  $ABC$  els punts mitjans respectius dels costats  $BC, CA$  i  $AB$  són  $D, F, E$ . Sigui:  $M$  el punt on la bisectriu interior de l'angle  $\angle ADB$  talla el costat  $AB$ , i  $N$  el punt on la bisectriu interior de l'angle  $\angle ADC$  talla el costat  $AC$ . Sigui  $O$  el punt d'intersecció de les rectes  $AD$  i  $MN$ ,  $P$  el punt d'intersecció de  $AB$  i  $FO$ , i  $R$  el punt d'intersecció de  $AC$  i  $EO$ . Demostreu que  $PR = AD$ .

Els guanyadors de la medalla d'or van ser Rafah Hajjar Muñoz (València), Jordi Rodríguez Manso (Catalunya), Alberto Acosta Reche (Castella - la Manxa), Saúl Rodríguez Martín (Madrid), Aitor Iribar López (Castella i Lleó) i Jan Olivetti Auladell (Catalunya).

Els concursants catalans van tenir una destacada actuació i van penjar-se un total de sis medalles:

**Medalla d'or:** Jordi Rodríguez Manso i Jan Olivetti Auladell.

**Medalles de plata:** Jordi Vilà Casadevall i Pau Autrand Caballero.

**Medalles de bronze:** Edgar Moreno Martínez i Adrián Rodríguez Muñoz.

## Viquimarató Matemàtica Intermèdia 2017

Joan Solà-Morales

Universitat Politècnica de Catalunya

La Viquimarató Matemàtica Intermèdia 2017 es va celebrar el dia 31 de març de 2017, de 15.30 a 20.00 h, a la FME de la UPC. Vam ser uns quinze assistents, i tres persones més, a les quals estem molt agraïts, que ens van donar suport en representació de l'Amical Wikimedia.

Per a molts de nosaltres va ser el primer contacte amb l'edició de pàgines de Viquipèdia, i vam aprendre moltes coses noves. A més d'això, es va presentar (a càrrec de Maria Guasch i qui signa aquest escrit) el material de treball generat en el projecte «Matemàtica Intermèdia a la Viquipèdia» de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'IEC. Aquest material està a disposició de tothom a la pàgina dedicada a aquesta Viquimarató, que podeu cercar dins de la Viquipèdia. El títol de la pàgina és «Viquipèdia: Viquimarató Matemàtica Intermèdia 2017».

Aquest material consisteix principalment en una llista de 319 pàgines de Viquipèdia que

tenen relació amb aquests nivells d'ensenyament, llista en la qual seria convenient que la comunitat matemàtica catalana intervingués sovint, fent-ne un seguiment i aportant millores i modificacions. També hi ha una col·lecció de fitxes completades sobre 170 d'aquestes pàgines.

Vam decidir treballar individualment per familiaritzar-nos amb aquest mitjà i, encara que només sigui de manera temptativa, molts dels assistents van triar una pàgina en la qual es proposen treballar.

També vam decidir convocar una segona sessió com a continuació de l'anterior, que si tot va bé ja s'haurà dut a terme quan els lectors de la *SCM/Notícies* llegeixin aquesta nota.

Suggerim a tots els interessats que facin una ullada a la llista i les fitxes esmentades més amunt. Igualment, convidem tothom que hi pugui estar interessat a contactar amb nosaltres.

## Barcelona Mathematical Days 2017

Albert Atserias

Universitat Politècnica de Catalunya

Els dies 27 i 28 d'abril de 2017 es va celebrar la segona edició del Barcelona Mathematical Days, el congrés de la Societat Catalana de Matemàtiques. La primera edició es va celebrar l'any 2014, i es preveu que la sèrie tingui continuïtat en el futur amb una freqüència triennal. Igual com en l'edició del 2014, les sessions científiques de l'edició d'enguany es van desenvolupar a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans del carrer del Carme de Barcelona.

El comitè científic del congrés, format pel comitè científic de la mateixa SCM, va decidir organitzar el congrés en quatre sessions plenàries, dues per dia, sis àrees temàtiques desenvolupades en dotze sessions, sis per dia, i una sessió de presentació de pòsters.

Per decidir les quatre sessions plenàries, el comitè científic va fer propostes de conferencians de renom internacional, d'entre les quals se'n van escollir quatre que, combinades,

poguessin integrar un programa de conferències atractiu i d'abast general. Finalment, els quatre conferenciants plenaris van ser Marino Arroyo (UPC Barcelona), Daniel Peralta-Salas (ICM Madrid), Samir Siksek (U. Warwick) i Sara van de Geer (ETH Zürich).

Per les sis àrees temàtiques, la direcció del comitè va sol·licitar propostes de temàtiques, i noms d'investigadors que poguessin fer-se càrrec de l'organització. A partir de les propostes, el comitè científic en va seleccionar sis, procurant que totes poguessin ser coordinades per almenys un investigador d'una universitat catalana en col·laboració amb un altre expert internacional. Per tal de fer el programa al més atractiu possible, també es va creure oportú que una de les sessions fos dedicada a una temàtica propera a la del premi Abel 2016, vigent en el moment del congrés, el professor Andrew Wiles. Els títols de les sis àrees temàtiques escollides van ser:

- *Algebra, Geometry and Biology,*
- *In and Around the Mapping Class Group,*
- *Mathematics in Space Science,*

- *Modularity and Diophantine Equations: Exploring Wiles' Universe,*
- *New Perspectives in PDEs and Applications,*
- *Progress in Transport Phenomena.*

Els detalls del programa i els organitzadors de sessions es poden trobar al web del congrés <http://bmd2017.espais.iec.cat/>.

Els anuncis de la trobada i la pàgina web del congrés van anunciar una crida per recollir pòsters que s'exposarien durant el congrés. Els participants van poder enviar els pòsters mitjançant el web del congrés i el comitè va seleccionar-los per a la presentació. Finalment, se'n van presentar cinc.

En ordre cronològic, la primera sessió plenària va ser la de la professora Sara van de Geer. La seva conferència «Concentration in high-dimensional statistics» va tractar del problema de la reconstrucció de models estocàstics multi-dimensionals a partir de mostres amb menys observacions que paràmetres. La conferència va presentar alguns resultats sobre les garanties d'aproximació dels estimadors regularitzats de tipus Lasso.

La segona conferència plenària va anar a càrrec del professor Samir Siksek, amb títol «Which integers are sums of seven cubes?» El teorema del quatre quadrats de Lagrange garanteix que qualsevol nombre natural es pugui escriure com la suma de quatre quadrats. Quants cubs calen per representar qualsevol nombre natural? Segons la conjectura de Waring, amb nou n'hi ha prou, i segons els teoremes de Landau, Baer, Dickson, Linnik i Watson, amb set n'hi ha prou excepte per a un nombre finit d'excepcions. La conferència tractava de la solució de Siksek a la pregunta de quines són aquestes excepcions: n'hi ha exactament disset i se sap quines són!

La tercera conferència plenària, a càrrec del professor Marino Arroyo portava per títol «Mathematical modeling and simulation of the cell envelop, an active and adaptable biological interface». La conferència va tractar de com modelar la biomecànica que governa, entre altres coses, les formes que adopten les cèl·lules, el seu procés de subdivisió, com s'adhereixen les unes a les altres, etcètera. Els models requereixen abordar problemes que combinen equacions diferencials parcials sobre superfícies corbes



amb les lleis d'evolució geomètrica d'aquestes superfícies.

Finalment, la quarta conferència plenària «A problem of Berry and knotted zeros in the eigenfunctions of the harmonic oscillator» va ser impartida pel professor Daniel Peralta-Salas. La conferència va tractar de la solució a la conjectura de Berry, segons la qual qualsevol *link* finit en espai euclidià es pot realitzar com el conjunt de zeros d'una funció pròpia de l'oscil·lador harmònic.

La participació al congrés va ser un èxit: 130 inscrits provinents d'institucions d'arreu del món. La gran majoria eren d'institucions catalanes i de la resta de la Unió Europea, el Regne Unit i Suïssa, però destaquen les vuit participacions d'institucions amb base als continents americans, les tres participacions d'institucions asiàtiques i una participació d'una institució australiana.



El preu de la inscripció incloïa el sopar del congrés, en format de còctel, que es va celebrar a l'Hotel Rivoli de la Rambla de Barcelona el dijous 27. Els costos d'organització es van finançar amb les inscripcions dels participants, els fons del pressupost de la SCM destinats a trobades científiques i un ajut sol·licitat a la Secció de Ciència i Tecnologia.

## **vídeoMAT: matemàtiques per respondre preguntes**

Sergi Múria  
Cesire Creamat

Les matemàtiques són una ciència fonamental i, precisament perquè estan en els fonaments de l'edifici de la ciència, de vegades no és senzill veure'n les innumerables aplicacions.

En el cas escolar se centren més esforços en aspectes formals o teòrics i es posa poc de manifest aquesta utilitat pràctica, tot i que hi ha una part del professorat que des de fa temps treballa en aquesta línia.

En aquesta situació apareix al 2013 el projecte vídeoMAT, que està coorganitzat pel Cesire Creamat, el MMACA, la FEEMCAT, la Societat Catalana de Matemàtiques i que té el suport de l'associació «Cinema en curs» i amb l'ajut econòmic de la Fundació CELLEX i la Fundació Bancària "la Caixa".

El terme vídeoMAT està acompanyat d'un subtítol que el defineix bé: «matemàtiques per respondre preguntes». Es tracta d'una proposta de creació de vídeos curts (d'un màxim de tres minuts) en els quals, a partir d'una pregunta, l'alumnat, treballant en equip, posa de manifest la presència de les matemàtiques en l'entorn o

exposa alguna de les seves aplicacions en àmbits com la ciència, la tecnologia, l'art, l'economia o la societat en general.

Es tracta d'un projecte col·lectiu en què, amb les aportacions dels equips participants, s'ha anat construint un recull de vídeos que estarà a disposició de tot el professorat i que es podrà utilitzar a les classes, d'una manera directa o com a «font d'inspiració». Per estimular la participació i reconèixer l'esforç dels diversos equips, el vídeoMAT es planteja en forma de projecte obert a totes les etapes educatives i atorga uns premis especials per a les produccions més destacades.

El vídeoMAT s'estructura en quatre categories:

- Educació infantil i cicle inicial d'educació primària
- Cicle mitjà i superior d'educació primària
- 1r, 2n i 3r de l'ESO
- 4t d'ESO i batxillerat

El projecte disposa d'un web propi ([www.videomat.cat](http://www.videomat.cat)) on es poden visualitzar les produccions presentades durant les cinc primeres edicions i tot el material de suport.

A més, cada any es fa un selecció de vint vídeos d'infantil i primària i vint d'educació secundària i batxillerat que passen a formar part d'una col·lecció permanent.

El divendres 19 de maig es va dur a terme a la sala Prat de la Riba de l'IEC el lliurament de premis de la cinquena edició.



En la cinquena edició hi van participar un total de 139 vídeos, 63 centres educatius i 1917 alumnes.

Cal destacar la presència de centres de les Illes Balears, la Comunitat Valenciana i el Marroc.

El jurat estava format per 34 persones, totes elles relacionades amb l'educació i el món audiovisual, que van atorgar set dels premis especials del certamen.

Els criteris utilitzats per fer les valoracions dels treballs van ser:

- L'interès de la pregunta en el marc de l'àmbit de presència o aplicació de les matemàtiques.
- La correcció i la coherència dels continguts matemàtics que es treballin.
- L'adequació de la resposta a la pregunta formulada.
- La claredat en l'exposició de la resposta o del procés a través del qual s'hi ha arribat.
- L'adequació del discurs narratiu i visual al servei del que es vol explicar.

- L'originalitat i la creativitat de la producció i de la posada en escena.
- L'adequació, atès el nivell educatiu, de la implicació de l'alumnat en totes les fases del procés de creació del vídeo.
- La utilització de músiques i imatges pròpies, lliures o de les que se'n tinguin els drets d'ús.

Dos premis més els atorga el públic per mitjà de les seves votacions. Amb aquesta votació es pretén incentivar que els equips (incloent-hi tota l'escola, amistats, familiars...) vegin els diversos vídeos matemàtics realitzats per altres participants.



### Suport al professorat

A banda de tota la documentació de suport que el professorat pot trobar al web del projecte, en tres de les cinc edicions s'ha dut a terme un curs de formació intensiu de dos caps de setmana per al professorat dels centres participants durant el qual, en petits grups, s'ha de realitzar un vídeo factible de ser presentat al projecte.

Per dur-lo a terme es disposa de l'ajuda de professionals del món audiovisual que guien tot el procés: formulació de preguntes per aprendre matemàtiques, recursos audiovisuals, orientacions per fer el guió, seqüenciació i planificació del vídeo i, finalment, el rodatge. Tots els materials de la formació es comparteixen en obert al web del projecte.

Us animem a participar al vídeoMAT2018!

## Cangur 2017: un cangur de sis xifres

Antoni Gomà  
Comissió Cangur SCM

Un nombre de sis xifres: 102.316.

Aquest és el nombre de participants que consta a la base de dades de la prova Cangur 2017 organitzada per la SCM a l'àmbit territorial de Catalunya, Andorra i la Franja de Ponent, i que augmenta a 123.524 si hi afegim la inscripció a les Illes Balears i el País Valencià, que tenen organitzacions descentralitzades però en el marc del Cangur de la SCM.

Afegiré alguns percentatges a la dada global de participació a les seus de Catalunya. Ho faré sense més comentari, perquè són dades que, certament, es comenten soles.

- Augment global d'un 14,14% en la participació respecte a l'any 2016.
- Cangur de primària: 26.995 participants, augment d'un 8,53%.
- Cangur de 1r, 2n i 3r d'ESO: 56.069 participants, augment d'un 19,27%.
- Cangur de 4t i batxillerat: 19.252 participants, augment d'un 8,41%.

El nombre total de centres inscrits en el Cangur 2017 (alguns en tots tres «subcangurs», altres en dos i altres només en un, és clar) ha estat de 1.053, amb un augment d'un 2,83% respecte al Cangur 2016.



### Acte d'entrega de premis

La SCM té establert que, en un acte solemne, es donaran quinze premis per nivell, de cinquè de primària a segon de batxillerat, publicats a

[cangur.org/cangur/cang2017/premis/](http://cangur.org/cangur/cang2017/premis/). Enguany, per gentilesa de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, l'acte s'ha fet al Teatre Poliorama, ubicat a l'edifici que és la seu de l'acadèmia. Ho hem d'agrair perquè creiem que el local va ser molt ben valorat pels assistents.

La consellera d'Ensenyament va presidir l'acte i a la mesa presidencial hi havia la representació institucional de la Reial Acadèmia, de l'Institut d'Estudis Catalans, de la SCM i de la comissió Cangur i, com és habitual, un professor (Antoni Vila, de l'Institut Gabriel Ferrater, de Reus) per fer avinent el reconeixement a l'ajut essencial del professorat perquè el Cangur arribi a bon terme, i un exalumne (Ramon Zuloaga, pin de plata per la seva participació del 2007 al 2010).



Al llarg de l'acte es van anar alternant els parlaments de les autoritats i l'explicació d'algunes dades i curiositats a l'entorn del Cangur amb l'entrega de premis pròpiament dita. Abans de la part culminant de l'acte hi va haver una brillant actuació coral, molt ben rebuda per tot el públic, a càrrec de l'Agrupació Musical de l'Institut Alexandre Satorras, de Mataró. Com cada any l'entrega de premis va acabar amb el lliurament dels pins de plata, un premi que la SCM atorga per a la globalitat del territori on es fa el Cangur en català a participants que hagin tingut una participació molt destacada. Enguany donem l'enhorabona per aquest premi a Rafah Hajjar Muñoz (IES Camp de Túria, Llúria), Jan Olivetti Auladell (La Farga/Aula Escola Europea) i Jordi Guillem Rodríguez

Manso (Pare Manyanet/Aula Escola Europea) amb la circumstància que aquest darrer alumne és el segon al llarg de 22 anys que respon amb encert totes les preguntes del nivell més alt del Cangur i que ha obtingut el rècord de puntuació total com a suma dels quatre nivells:  $150 + 137,5 + 135 + 150$ .



Aquesta distinció destacada del Cangur també s'atorga a persones que per la seva tasca hagin contribuït a fer més gran l'activitat. Per aquesta raó es va concedir el pin de plata al Sr. Joan Solà-Morales i Rubió, expresident de la SCM i actualment membre de la comissió Cangur de la SCM.

### Alguns altres detalls

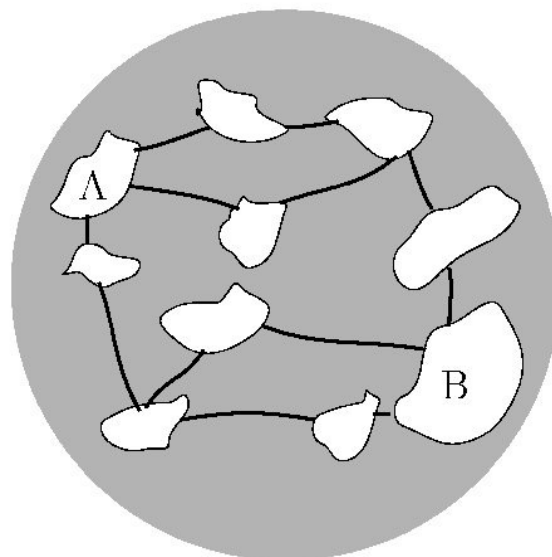
Com que, en vista de la participació, queda clar que molts més de 15 nois i noies per nivell mereixen un premi, es fa una menció honorífica a l'1% de les millors puntuacions. Enguany, han rebut una publicació que ha ofert la fundació Cellex, patrocinador del Cangur, completada amb una separata que ha elaborat la comissió Cangur amb dades i reflexions sobre el Cangur 2017 i que es podrà descarregar de web a [cangur.org/cangur/cang2017/dossier.pdf](http://cangur.org/cangur/cang2017/dossier.pdf).

També és interessant comentar el fet que hi ha hagut un «replantejament conceptual» dels premis, que han passat d'objectes electrònics a obsequis relacionats amb les matemàtiques, el més important dels quals és un campus Cangur (que es desenvoluparà en tres torns, per als tres «subcangurs») organitzat per l'empresa de serveis educatius Explòrium. Aquest premi s'ha completat amb unes medalles d'or, plata i bronze per als premis de pòdium.

Ara bé, el nombre de medalles en algun nivell han superat de llarg les tres. Això dels empats no és pas nou però, sens dubte, el fet que la participació augmenti tant ho afavoreix.

Mireu unes dades: enguany a tercer d'ESO, amb 15.700 participants hi ha hagut cinc alumnes amb 150 punts (cinc primers premis), dos de 146 punts i sis de 145 punts. Però és que fa dos anys, amb 8.000 participants van ser tres de 150 punts, un de 146 i tres de 145. I ja fa temps, el 1999, amb «només» 1.700 participants hi va haver cinc concursants amb 150 punts, un de 147, un de 146,25 i deu de 145. És que costa molt superar la influència de l'atzar («Causa assignada als fets dels quals se'n desconeix la causa real») perquè un problema sigui «fàcil» o «difícil». Volem fer un article reposat sobre el tema en la propera *SCM/Notícia*, però ara vegeu-ne un tast.

En un planeta hi ha deu illes i dotze ponts disposats segons el dibuix següent:



Si es vol impedir que es pugui anar des de A fins a B passant pels ponts, quin és el nombre més petits de ponts que s'han de tancar?

Aquest problema dels ponts va enganyar molt l'alumnat. De fet, es va posar com a primer problema a segon d'ESO (el primer problema es vol que sigui «ben fàcil», a l'abast de tothom) i tant a segon, com a primer, com a sisè de primària, on també es va proposar el problema, el percentatge d'errors va vorejar el 70%.

Aleshores va arribar el moment més curiós de l'acte d'entrega de premis. Un total de 19 participants de 6è de primària amb encert total, de més de 13.500 participants, com ho havíem de valorar? Com un èxit de la feina que fa la mainada d'aquesta edat.

Ja esperem amb il·lusió que es repeteixi l'èxit en el Cangur 2018.

## Activitats amb ajut de la Societat

### Barcelona Topology Workshop

Carles Broto

Universitat Autònoma de Barcelona

El 16 i 17 de desembre de 2016 va tenir lloc al Centre de Recerca Matemàtica la sessió d'hivern del **Barcelona Topology Workshop 2016** (<http://mat.uab.cat/~btw/2016/>).

El Barcelona Topology Workshop és una trobada organitzada anualment des de l'any 2004 pel Grup de Topologia Algebraica de Barcelona (GTAB, <http://mat.uab.cat/topalg/>) i dedicada a diferents temes d'actualitat en topologia algebraica. L'any 2016 ha constatat per primera vegada de dues sessions, una a la primavera i l'altra a l'hivern. En aquesta darrera hi van participar prestigiosos investigadors d'arreu:

- Alejandro Adem (University of British Columbia)
- Javier Gutiérrez (Universitat de Barcelona)
- Drew Heard (Universität Hamburg)
- Sune Precht Reeh (Massachusetts Institute of Technology)
- Jérôme Scherer (École Polytechnique Fédérale de Lausanne)
- Stephen Theriault (University of Southampton)
- Sarah Whitehouse (University of Sheffield)

En aquestes xerrades es van tractar diferents temes de teoria d'homotopia, com ara operades llevat d'homotopia i estructures categòriques d'ordre superior, categories de model localitzades, accions de grups llevat d'homotopia i sistemes de fusió i teoria d'homotopia estable i inestable.

L'organització, a càrrec d'Imma Gálvez (UPC) i Alex González (CRM), va fer possible una trobada molt profitosa tant científicament com socialment.



Aprofitem per agrair el suport dels grups de topologia algebraica de les universitats de Barcelona, Autònoma de Barcelona i Politècnica de Catalunya, així com de la Societat Catalana de Matemàtiques.

## 5a Jornada d'Investigadors Predoctorals Interdisciplinària (JIPI 2017)

Ignacio Morer

Comitè organitzador

La cinquena edició de la JIPI va celebrar-se el dia 9 de febrer de 2017 a l'Edifici Històric de la Universitat de Barcelona. Aquest dia es van aplegar investigadors predoctorals provinents de diferents universitats i centres de recerca catalans.

### Crònica de la jornada

La jornada va començar amb el doctor Joan Elias, rector de la Universitat de Barcelona; la

doctora Victòria Nogués, Secretària acadèmica de l'Escola de Doctorat de la Universitat Autònoma de Barcelona, i Paula Córdoba (representant de JIPI); tots ells a la taula d'inauguració.

L'eix vertebral de la JIPI van ser les *flash talks*, en què els investigadors van presentar la seva recerca en format de xerrades de curta durada amb un caire dinàmic i amè. En total hi va haver 47 ponents en 37 xerrades, agrupades en

sessions temàtiques: tecnologies, humanitats, ciències naturals, i ciències socials. L'idioma vehicular de la jornada va ser l'anglès.<sup>1</sup>

S'ha mantingut la realització de **debats** relacionats d'alguna manera amb l'àmbit investigador:

- **Dones a la recerca.** Es va comentar àmpliament la situació de la dona a la universitat des d'un punt de vista crític. Hi van prendre part la doctora Nuria Salan, professora a la UPC, la doctora Maribel Ponferrada, doctora en Antropologia Social i Cultural per la UAB, i la doctora Marta Casanellas, professora de matemàtiques a la UPC.
- **Emprenedoria i el sector privat.** Els ponents van donar la seva opinió sobre les oportunitats de transició al món de l'empresa després de cursar un doctorat. Hi van prendre part el doctor José San Pedro, *data scientist* a Schibsted Media Group; el doctor Eduardo Sánchez, investigador al Barcelona Supercomputing Center, i el doctor Melchor Sánchez, ara mateix director científic de la seva empresa Mind the Byte.
- **Educació en la ciència:** Es va considerar tractar el tema de la transmissió de la ciència a través de l'**educació**. Hi van participar el doctor Xavi Giménez i Àngela Garcia Lladó, professors a la Universitat de Barcelona, i la doctora Sílvia Simón, de la Universitat de Girona.

La sessió de *speed networking* va continuar sent un dels trets significatius de les JIPI, en què els participants formen parelles, i disposen de 5 minuts per presentar-se i per explicar-se els interessos en un entorn íntim, relaxat i distret, i es canvia de parella passats els 5 minuts.

Gràcies a la bona acollida de la **sessió de pòsters** de l'edició passada aquest any s'ha decidit mantenir-la. S'ha presentat un total de 39 pòsters, a partir dels quals hem creat un espai per a la interacció directa entre els participants.

Per acabar, a la taula de **cloenda** hi van assistir la doctora Estrella Montolio, vicerectora de l'Escola de Doctorat de la Universitat de Barcelona; el doctor Fernando Orejas, vicerector d'investigació de la Universitat Politècnica de Catalunya; el doctor Joan Domènec Ros, president de l'Institut d'Estudis Catalans, i Sergi Posada (equip JIPI).



## Valoració

La participació a la jornada s'ha incrementat respecte a la de l'any anterior, amb un nombre lleugerament superior a les quatre-centes inscripcions. La interdisciplinarietat de la jornada ha quedat àmpliament manifesta, com demostra la varietat de les temàtiques. A més, vam rebre molts més *abstracts* de disciplines que altres anys no havien estat tan ben representades, com per exemple l'art, el dret o l'economia. Aquesta 5a JIPI ha servit per confirmar el suport institucional del qual es beneficia la jornada, ja que a més del reiterat suport econòmic per part de les institucions que havien participat en edicions anteriors, aquest any hem disposat de fonts de finançament extres i la incorporació de la Universitat Autònoma de Barcelona com a nou col·laborador. Els organitzadors volem expressar la valoració positiva de la jornada i reivindicar de nou la necessitat d'un espai com les JIPI on poder debatre i donar a conèixer la investigació que duen a terme els investigadors predoctorals, que al cap i a la fi representa una gran part de la ciència que es produeix a Catalunya.

<sup>1</sup>La totalitat de xerrades van ser enregistrades i estan disponibles al canal de la Universitat de Barcelona i al canal de YouTube de les JIPI.

## IX Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra. Donem prou protagonisme als nostres alumnes en el treball amb GeoGebra?

Pep Bujosa

Associació Catalana de GeoGebra

Els dies 17 i 18 de febrer de 2017, vam celebrar al campus de la Ciutadella de la Universitat Pompeu Fabra les nostres IX Jornades de GeoGebra, amb el suport de la UPF i de la Societat Catalana de Matemàtiques. Volíem conservar l'estructura que vam iniciar l'any passat, que va incorporar el treball en tallers paral·lels i que va ser tan ben valorada en les enquestes. També volíem que fossin útils tant per a primària com per a secundària. Aquest va ser el programa:



### Divendres, 17 de febrer de 2017

- Conferència: «Poliedros regulares en 3D. Ideas para el aula», per José Manuel Arranz (Instituto GeoGebra de Castilla y León). Diferents exemples de construccions fetes amb el GeoGebra, amb les quals es vol exemplificar la potencialitat del programa per a l'estudi dels poliedres i les seves propietats, treballant amb 3D.
- Comunicació: «Herramientas de razonamiento automático», per Tomás Recio.
- Comunicació: «Si puc, tothom pot», per Jordi Servat.
- Presentació de treballs de recerca: «Dinàmica dels moviments planetaris», per Berta Salvadores. Tutor: Roger Sempere, de l'Institut Secretari Coloma, Barcelona. «Traient suc d'un tetraedre», per Toni Gomà. Institut de batxillerat de Tortosa, 1983.
- Taller: «GeoGebra bàsics», per Albert Garcia i Pep Bujosa.
- Taller: «El treball a l'aula de batxillerat amb el GeoGebra», per Guillem Blancafort.
- Taller: «Alumnes més autònoms amb el CAS del GeoGebra», per Carlos Giménez.
- «GeoGebra 3D: un pas endavant», per Bernat Ancochea.

### Dissabte, 18 de febrer de 2017

- Conferència: «I tanmateix es mou», per Maite Gorriz (Institut Pla Marcell de Cardedeu) i Santiago Vilches (Institut Marta Estrada de Granollers). Què pensaria Galileu si pogués pujar en una estació espacial? Quina cara posaria Newton si pogués veure com en el GeoGebra una funció és un punt en moviment? Què diria Leibniz si tingués a les seves mans una calculadora simbòlica? Què faria Louis Daguerre o els germans Lumière amb un telèfon intel·ligent? Quina música faria Bach si tingués al seu abast un sintetitzador? I nosaltres, el professorat de matemàtiques?
- Comunicació: «De 3 a 19: el principi d'Arquímedes», per Bernat Ancochea i Isabel Sorigué.
- Comunicació: «Presentació i visualització amb el GeoGebra d'un document antic», per Jaume Bartrolí.
- Comunicació: «Elogio de los triángulos: modelos dinámicos para la trigonometría», per Aitzol Lasa, Jaione Abaurrea i Nahia Belloso.
- Comunicació: «GeoGebra i impressora 3D: amor platònic?», per Sergi Múria i Joan Jareño.
- Taller: «GeoGebra a infantil i primària, un repte i una oportunitat», per Bernat Ancochea i Isabel Sorigué.

- Taller: «El GeoGebra també amb tauletes, *smartphones* i iPads», per Albert Garcia.
- Taller: «El GeoGebra com a entorn virtual d'aprenentatge: llibres i grups», per Carlos Giménez.
- Taller: «Simulacions d'experiments aleatoris amb el GeoGebra 3D», per Toni Gomà.

Els comentaris que ens han fet arribar els participants han estat molt valuosos i valoren ben positivament la

## Premis i convocatòries

Albert Avinyó  
Editor de la *SCM/Notícies*

### Societat Catalana de Matemàtiques (IEC)

- El **premi Albert Dou**, concedit a un treball que contribueixi a fer visible la importància de la matemàtica en el nostre món, a transmetre el coneixement matemàtic a un públic més ampli que els mateixos s'ha atorgat a **Armengol Gasull** del Departament de Matemàtiques de la UAB pel treball que porta per títol «L'infinít i més enllà».
- El **premi Évariste Galois**, concedit a un treball d'investigació, bibliogràfic o d'assaig sobre matemàtiques, s'ha atorgat a **Joan Claramunt** del Departament de Matemàtiques de la UAB pel treball titulat «Differential Galois Theory».
- Aquests premis foren lliurats el 21 d'abril passat a la seu de l'IEC en l'acte d'entrega dels premis Sant Jordi 2017.



- El **premi Emmy Noether**, destinat a premiar els millors treballs fi de grau dels estudiants de matemàtiques de les universitats catalanes, s'ha atorgat *ex aequo* als treballs «Fractional Dimension of the Fractional Brownian Motion» de l'estudiant **Aitor Nicolàs Carnicero**, del grau en Matemàtiques de la UAB, amb el professor Ferran Utzet com a tutor; i a «Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture» de l'estudiant **Óscar Rivero**, del grau en Matemàtiques de la UPC, amb el professor Víctor Rotger com a tutor. També es va concedir una menció al treball «Generalizations of the Hexagramme Mystique» de l'estudiant **Sergi Baena**, del grau en Matemàtiques de la UB, amb el professor Joan Carles Naranjo k com a tutor.
- Aquest premi fou lliurat el 27 de febrer passat a la seu de l'IEC en l'acte Noether, del qual podeu trobar més informació a la secció «Activitats» d'aquesta mateixa *SCM/Notícies*.
- Convocatòries 2018
- La SCM ha convocat la segona edició del **premi Emmy Noether** que es concedeix als estudiants del grau en Matemàtiques que defensen el treball de fi de grau (TFG). La dotació del premi és de vuit-cents euros. Es poden concedir fins a dos accèssits. El termini de presentació de candidatures es tancarà el 4 de novembre de 2017, a les 12.00 hores. Més informació a [http://premis.iec.cat/premis/premis\\$\\_\\$un.asp?id=36](http://premis.iec.cat/premis/premis$_$un.asp?id=36)



- La SCM ha convocat una nova edició del **premi Évariste Galois**, instituït l'any 1962 i atorgat a un treball d'investigació o d'assaig sobre matemàtiques. La dotació del premi és de mil euros i es poden concedir fins a dos accèssits. En aquesta convocatòria hi poden prendre part estudiants universitaris i titulats des de l'1 de febrer de 2013. Els treballs han de ser inèdits i redactats en llengua catalana o anglesa, amb un ampli resum en català en la versió anglesa. El termini d'admissió de candidatures es tancarà el 30 de novembre de 2017, a les 13.00 hores. Més informació a [http://premis.iec.cat/premis/premis\\$\\_\\$un.asp?id=35](http://premis.iec.cat/premis/premis$_$un.asp?id=35)

### Fundació Ferran Sunyer i Balaguer

El Patronat de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer, en la reunió del dia 16 de març del 2017, va acordar concedir els premis i les borses d'estudi següents:

- El premi Ferran Sunyer i Balaguer 2017 a la monografia titulada «Motivic Integration» dels professors **Antoine Chambert-Loir**, de la Universitat París-Diderot (Paris 7), **Johannes Nicaise**, de l'Imperial College de Londres i **Julien Sebag**, de la Universitat de Rennes 1. Aquesta teoria ha desencadenat desenvolupaments en la teoria de la singularitat, la teoria de motius, la geometria no arquimediana i la tropical.



La monografia és la primera exposició completa d'aquesta teoria, que va molt més enllà dels dos volums dels articles publicats a LMS el 2011. En particular, la major part del material de les seccions 2 («Arc Schemes»)

i 3-4 («Greenberg Schemes») són nous. La secció 6 és un bon resum de les aplicacions de la integració motívica. Aquesta monografia la publicarà Birkhäuser a la sèrie «Progress in Mathematics».

- Les borses Ferran Sunyer i Balaguer 2017 a:
  - **Giulia Binotto**, de la Universitat de Barcelona, per fer una estada de dos mesos a la Universitat Lliure d'Amsterdam (Holanda).
  - **Alberto Debernardi**, de la Universitat Autònoma de Barcelona, per fer una estada d'un mes a la Universitat Nacional Eurasiàtica L. N. Gumiliov (Kazakhstan).
  - **Jordi Delgado**, de la Universitat Politècnica de Catalunya, per fer una estada de tres mesos al Centre de Recerca Matemàtica.
  - **Núria Folguera**, de la Universitat Autònoma de Barcelona, per fer una estada d'un mes al Mathematical Institute, Universitat d'Oxford (Regne Unit).
  - **Ricard Garra**, de la Universitat de Lleida, per fer una estada de tres mesos a la Universitat de Saarland (Alemanya).
  - **Ana Navarro**, de la Universitat Politècnica de València, per fer una estada de tres mesos a la Universitat de Sevilla.
- El premi Matemàtiques i Societat 2017 a:
  - El **diari Ara**, concretament a la seva directora, Esther Vera, dedicat de manera especial a les matemàtiques amb el títol «I love mates», publicat el 10 de juliol de 2016, que conté l'editorial, un dossier especial i en les diferents seccions del diari s'inclouen exercicis de matemàtiques.
- Convocatòria 2018
  - Es convoca el **premi Ferran Sunyer i Balaguer 2018**, per a una monografia matemàtica de caràcter expositiu que presenti els darrers desenvolupaments d'una àrea activa en recerca en la qual el concursant hagi contribuït d'una manera important. La dotació del premi és de quinze mil euros i la monografia guanyadora serà publicada en la sèrie «Progress in Mathematics» de l'editorial Birkhäuser.

El termini d'admissió de candidatures es tancarà l'11 de desembre del 2017.

### Altres premis, beques i reconeixements

- La professora **Eva Miranda** de la UPC ha estat distingida amb una **FSMP Excellence Chair**. Aquesta beca, promoguda per la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, permet a científics excel·lents allotjar-se en un o diversos laboratoris afiliats a aquesta fundació. En aquest cas, l'Eva estarà durant sis mesos al CEREMADE i a l'IMCCE, tots dos a París.
- El professor emèrit de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica, **Josep Pla i Carrera**, ha estat guardonat amb el **premi Crítica Serra d'Or 2017** en la categoria de recerca (altres ciències) pels volums «Història de la matemàtica: Egipte i Mesopotàmia» i «Història de la matemàtica: Grècia».



- **Irene Arias, Ramon Codina i Eva Miranda**, matemàtics i professors de la UPC, han estat guardonats amb un ICREA Academia 2016.
- El divendres 17 de maig de 2017 es va resoldre la 14a edició del **premi Poincaré**,

en l'acte de lliurament de premis que va tenir lloc a la sala d'actes de la Facultat de Matemàtiques de la UPC. Els treballs guanyadors van ser els següents:

- Primer premi: «Els grafs: xarxes, camins i connexions. De la matemàtica discreta a la realitat» d'**Aniol Garcia Serrano**, Vedruna-Malgrat de Mar.
- Segon premi: «Estudio del origen del número e y de sus aplicaciones en diversos campos de las matemáticas» de **Pablo Nicolás Martínez**, IES Juan Carlos I, Múrcia.
- Tercer premi: «Com s'escriu òrbita?» de **Jana Ferran Oliva**, INS Antoni Torroja, Cervera.



- **Xavier Ros-Oton**, llicenciat en Matemàtiques per la UPC, i actualment R. H. Bing Instructor a la Universitat de Texas a Austin, ha estat el guanyador del **Premi SEMA Antonio Valle al Joven Investigador 2017**. Segons el jurat, les seves contribucions en l'àmbit dels problemes de frontera lliure i dels operadors no locals, així com la repercussió que han tingut els seus articles, el fan mereixedor d'aquest premi.

A tots, la nostra més cordial felicitació!

### Sobre la *Història de la matemàtica*, de Josep Pla i Carrera

Sebastià Xambó Descamps

Professor emèrit del Departament de Matemàtiques de la UPC

Abans de res convé fer-se una idea de la insòlita magnitud d'aquest projecte. Amb el subtítol *Resultats, textos i contextos*, la previsió és que aquesta *Història de la matemàtica* comprendrà, en una primera fase (o en el que interpreto com una primera fase), almenys sis volums [1–6]. Amb [1] i [2] publicats el juliol del 2016, la previsió és que [3] i [4] apareguin enguany, [5] l'any vinent i [6] el 2019. «Amb això s'acaba el projecte...», em diu l'autor, però atès que el títol general no al·ludeix a la matemàtica grega, sembla versemblant que el disseny de l'autor sigui molt més ampli, una suposició que s'adiu bé amb la latitud, profunditat i rigor de la seva extensa obra.



Indagant sobre la versemblança d'aquesta conjectura, l'autor em dona un indicatiu ben revelador: «...però m'agradaria molt fer un volum de matemàtica no grega: bizantina, índia, xinesa, japonesa i àrab». Fabulós! I després? La resposta és fàcil: «El text que proposo és, de fet, una *història global, ordenada cronològicament per autors*, amb la intenció de cobrir els esdeveniments matemàtics *des de l'antiquitat fins al començament del segle XX*» ([1], Preàmbul, LXI; èmfasi afegit).

Esperem que tingui molt d'èxit i, en particular, que trobi el suport que aquesta determinació mereix, no només per al volum (o volums) de matemàtica no grega, sinó també per tal que pugui emprendre plans adients per encaminar,

amb mètodes i estils similars i ben esmolats, la història de la matemàtica europea des de la seva revelació.

Tornant a la magnitud de l'empresa, no es pot deixar d'esmentar la seva gran complexitat en general i la de cada volum en particular. Sobre les característiques del projecte, el document essencial és l'extens preàmbul del volum [1], al qual hem al·ludit fa un moment i al qual tornarem després. I pel que fa als volums particulars, aquí només podem considerar la complexitat dels volums publicats, [1] i [2], i de la qual en mostra una idea la recopilació d'algunes dades de la seva estructura formal, com ara les aplegades a les taules 1, 2 i 3. Cal afegir-hi el laberint que en principi representen la proliferació de notes a peu de pàgina, d'altres referències internes, de notes bibliogràfiques i els freqüents canvis de registre expositiu. No obstant això la coherència i robustesa del conjunt es fan paleses en adonar-nos que es tracta d'un trenat deliberat de diversos fils que l'autor considera essencials per aconseguir una història de la matemàtica amb tota la riquesa d'elements i matisacions que contribueixen a potenciar el seu valor i utilitat, particularment en l'ensenyament de la matemàtica a tots els nivells. Meravella, a més, que el resultat és un text sorprenentment engrescador en qualsevol de les lectures que en vulguem fer i que hauria de ser interessant per a moltes persones en una gran diversitat de circumstàncies.

Part	Contingut	Pàgines
0	Preàmbul	57
1	Egipte (E)	119
2	Mesopotàmia (M)	150
A	Textos E	28
B	Textos M	31
Bibliografia	87 entrades	19
Índexs	7 tipus	70

Taula 1: Egipte i Mesopotàmia

Part	Contingut	Pàgines
0	Introducció	4
1	Prolegòmens	60
2	Tales i Pitàgores	105
3	L'era de Pèricles	99
4	Plató i Aristòtil	96
A	Textos VI aC	76
B	Textos V aC	70
C	Textos IV aC	97
Bibliografia	436 entrades	39
Índexs	8 tipus	123

**Taula 2: Grècia I**

Elements	E-M	Gr-I
Notes peu pàg.	580	1612
Exercicis	99	166
Problemes	21	16
Programes	10	11

**Taula 3: Algunes comparacions**

L'autor és un vehement defensor de la importància de la resolució de problemes en la formació matemàtica. En el cas que ens ocupa, aquesta actitud la reflecteix d'aquesta manera: «Em refereixo a la necessitat de recórrer, de tant en tant i tan sovint com calgui, a algun problema concret idoni que ajudi a suggerir les dificultats, els conceptes, les metodologies, les tècniques, els algorismes i àdhuc les teories matemàtiques que tenim entre mans i que volem transmetre tot introduint-ne el llenguatge específic» ([1], xv). I encara: «M'atreviria a dir que un docent esdevé un mestre —en el sentit més digne del terme— quan aconsegueix que la presentació d'allò que ensenya estigui ben falcada en problemes concrets, interessants i entenedors, suggeridors i capaços d'obrir la porta als resultats generals» ([1], xvi).

En conjunció amb la conveniència de plantejar i resoldre problemes, també defensa que «[...] allò que permet aprendre un nou tipus de qüestions matemàtiques —des d'un cert vessant almenys— és la programació d'algorismes senzills, ja apresos, perquè això apropa a l'ús dels llenguatges, al disseny de rutines i d'algorismes, [...]» ([1], li). Vegem una il·lustració d'aquest cercle d'idees. En un exercici ([1], exercici 18,

pàgina 56) demana expressar un seguit de fraccions com a suma de fraccions unitàries, una qüestió natural en el context de la matemàtica egípcia. Posteriorment, planteja el repte de demostrar ([1], problema 4, pàgina 114) que això és possible per a qualsevol fracció positiva inferior a 1 (mètode de Fibonacci-Sylvester), tot remetent a l'esmentat exercici com a punt de partida. Finalment, proposa ([1], programa 3, pàgina 118) fer un programa que obtingui la descomposició d'una fracció arbitrària com a suma de fraccions unitàries (en el text, que generalment és molt acurat, hi diu «funcions arbitràries»).

Pel que fa als textos clau, l'autor fa la consideració següent: «[...] els docents en ciència, en general, i en matemàtica, en particular, haurien d'haver-se apropat als textos més rellevants dels prohoms de la seva disciplina. [...] m'ha semblat oportú fer un recull dels textos matemàtics —textos clau, textos font, textos iniciàtics, etc.— que s'han usat [...] per establir els resultats dels enuncis matemàtics —problemes i teoremes— més notables» ([1], xx).

El resum que l'autor fa del seu projecte, especialment en relació amb la llengua, és el següent: «És per aquesta raó [el capteniment d'usar el català] que m'ha semblat raonable —com a herència de la meua vida docent i de recerca— deixar una *Història de la matemàtica*, en català, tan detallada com sigui capaç de fer-ho, en la qual es posin en relleu els resultats més notables que s'han assolit i els contextos en què això ha esdevingut, complementada amb textos font, traduïts al català, seguint la tradició anglosaxona dels *source books*» ([1], xi).

I un apunt per acabar. L'any 2016, el de l'aparició de [1] i [2], fou el tricentenari de la mort de Leibniz i em fa l'efecte que l'obra que comentem, i d'altres del mateix autor, contribueixen positivament, des de la història i la preocupació docent, a un dels grans esquemes d'aquell mestre: l'*ars inveniendi*. En efecte, no he pogut deixar de pensar que el fil d'Ariadna implícit de la *Història de la matemàtica* és la qüestió primordial del descobriment en matemàtiques: les maneres en què s'ha manifestat durant els quatre darrers mil·lennis i els ingredients que hi han de concórrer per fer-lo possible. Com que una millor comprensió de les circumstàncies que

afavoreixen el descobriment matemàtic aporta energia a qualsevol altre quefer matemàtic, la *Història de la matemàtica* serà sens dubte apreciada per tothom que s'endinsi en les seves pàgines.

## Referències

J. PLA: *Història de la matemàtica. Resultats, textos i contextos*.

[1] *Egipte i Mesopotàmia*. IEC, juliol 2016. LXV + 427 pàgines.

[2] *Grècia I (de Tales a Plató i Aristòtil)*. IEC, juliol 2016. XIV + 781 pàgines.

[3] *Grècia IIa (Elements d'Euclides, llibres 1-6)*. IEC, 2017. XIV + 415 pàgines.

[4] *Grècia IIb (Elements d'Euclides, llibres 7-13)*. IEC, 2017. XIV + 638 pàgines.

[5] *Grècia III (Euclides, Arquimedes i Apol·loni)*. IEC, 2018. ~ 900.

[6] *Grècia IV (Epígons de la matemàtica grega: Ptolomeu, Pappos, Diofant, Nicòmac, Procle, ...)*. IEC, 2019. ~ 900.

## Quant cobra un matemàtic?

X. R.-O. i J. S.-M

Potser la pregunta que dona títol a aquest escrit no està gaire ben formulada, és veritat. Però hem d'acceptar que és una pregunta natural, potser per ser resposta de manera poc precisa o informal. Més o menys així és com li va plantejar una estudiant de màster a un dels autors.

Per donar-hi resposta i sense ser experts ni en dret laboral ni en sociologia professional, hem parlat amb algunes persones i hem consultat alguns documents públics. Les dades més clares són, és clar, les que hi ha en documents públics, però això no vol dir que siguin completes: sempre hi ha excepcions, complements, tractaments individualitzats, etcètera, que no són fàcils de conèixer per a un observador exterior.

Hem dividit les àrees professionals en diversos apartats: docència i recerca a nivell universitari, distingint entre places temporals i places permanents, docència d'ensenyament secundari i, finalment, activitat professional (no docent) en el món de l'empresa privada. En cadascun dels apartats hem buscat referències tan representatives com ha estat possible, però les nostres referències no pretenien ser exhaustives. En cada apartat ens hem circumscrit a la realitat catalana, encara que hem intentat, de manera puntual, afegir algunes dades de situacions que hem conegut d'àmbit internacional.

La majoria de les sortides professionals dels matemàtics són llocs de treball que comparteixen amb altres titulats: estadístics, físics, enginyers, etcètera. Per tant, com és natural, els sous depenen dels llocs de treball, i només de manera indirecta de la titulació del treballador. Aprofitem l'ocasió per recordar als lectors de la *SCM/Notícies* l'existència de la pàgina web <https://mathire.org/>, feta en col·laboració amb l'EMS.



A l'article tots els sous i complements són quantitats brutes anuals, i no es compten la part empresarial de les quotes a la Seguretat Social o altres despeses que paga qui contracta.

## Docència i recerca a nivell universitari, contractes temporals

Per accedir a la docència i recerca a nivell universitari es necessita el títol de doctor. Un contracte predoctoral, el que abans s'anomenava **beca de doctorat**, s'ha situat el 2016 en un sou (brut anual) de 16.422 euros [1] en el programa FPU, amb petites variacions si es tracta de beques dels programes FI, FPI, de les universitats, de la BGSMath, etcètera. Tots tenen una durada limitada a tres o quatre anys, segons el cas.

Altres contractes predoctorals poden tenir dotacions superiors: per exemple, les beques de "la Caixa" per a estudis doctorals a Espanya, convocatòria del 2017, tenen una dotació de 36.000 euros, però se n'ha de deduir almenys la quota a la Seguretat Social (prop d'un 25% del sou) i els preus de matrícula que corresponguin (gairebé 1.000 euros anuals). Aquestes dotacions superiors podem considerar que en el nostre país tenen un caràcter força excepcional.

Podem donar algunes dades dels contractes predoctorals a l'estranger: EUA, entre 20.000 i 35.000 dòlars, Suïssa, entre 47.000 i 80.000 francs suïssos (actualment 1 franc suís equival a 1 dòlar) i Alemanya, entre 26.000 i 46.000 euros. A França el salari per als estudiants de doctorat pot oscil·lar entre 20.000 i 24.000 euros. En totes les xifres de l'estranger s'ha de tenir en compte que tant el cost de la vida com els impostos poden variar molt d'un lloc a l'altre.

Els **contractes postdoctorals** més freqüents al nostre país són els dels programes Juan de la Cierva i Beatriu de Pinós. Aquests contractes, també limitats a alguns anys, són els que la gent coneix com a **beques postdoctorals**, encara que la terminologia no sigui precisa. Els sous per al 2016 han estat, respectivament, de 25.000 i 32.800 euros.

Per als *postdocs* a l'estranger tenim: EUA, entre 60.000 i 65.000 dòlars; Suïssa, entre 75.000 i 95.000 francs suïssos; Alemanya, entre 42.000 i 59.000 euros, i França, uns 30.000 euros, si més no durant els dos primers anys.

Els contractes de **professor lector** o del programa **Ramón y Cajal** es poden considerar un estadi intermedi entre un contracte postdoctoral i un contracte de professor permanent. Per

obtenir els del Ramón y Cajal es necessita una experiència postdoctoral d'entre quatre i deu anys.



En el cas dels contractes Ramón y Cajal el sou per al 2016 ha estat de 31.600 euros. Per exemple, una nòmina del mes de febrer de la qual tenim dades ha estat de 2.633,33 euros (brut, corresponent a només 12 pagues) i el sou net de 2.016,34 euros, que depèn, és clar, de la situació personal del contractat.

El sou dels professors lectors, primera categoria de professorat universitari a temps complet, encara que no és permanent, ha estat de 32.273,64 euros.

Als contractats Ramón y Cajal i als lectors els podríem assimilar a *assistant professors* en l'àmbit internacional. Algunes dades: EUA, entre 85.000 i 110.000 dòlars; Suïssa, prop de 150.000 francs suïssos.

Hem d'esmentar, finalment, la categoria universitària dels **professors associats**, professors a **temps parcial**, que tenen una altra feina, no són permanents i no exigeixen el títol de doctor. Un associat «bàsic» (sis hores de docència per setmana) ha cobrat 7.549,84 euros a l'any.

Per a les places de professorat a nivell universitari a les universitats públiques, la majoria de les dades les hem obtingut de [2].

## Docència i recerca a nivell universitari, contractes permanents

Les places permanents a les **universitats públiques catalanes** tenen essencialment dues categories: agregat/titular d'universitat i catedràtic. Els agregats han rebut un sou de 35.037,70 euros i els catedràtics de 44.018,97

euros. Aquestes xifres corresponen al cos de funcionaris. Pel que fa al cos laboral, hi ha petites diferències, de prop de l'1%.

Però tant per als funcionaris com per als laborals, en aquestes categories, tenen molta importància els complements, tant els de docència (quinquennis) com els de recerca (sexennis) o els de gestió. En números rodons per docència o recerca són uns 3.000 euros (anual, brut, per als obtinguts actualment) cada tram a la categoria dels agregats, i uns 3.700 euros per als catedràtics. I quantitats inferiors, i força variades, per als de gestió. S'ha de tenir en compte que la quantitat depèn de l'any en què es va obtenir el tram i de la categoria que es tenia quan es va assolir. També compten els triennis, de prop de l'1% del sou cada tres anys. Tots aquests complements acaben constituint una part important del sou dels professors permanents de més antiguitat. Per exemple, un catedràtic amb 30 anys d'antiguitat i tots els complements possibles, podria arribar a cobrar entre 80.000 i 85.000 euros bruts.



El personal investigador contractat per **centres de recerca** o per institucions com **ICREA** disposen dels seus propis barems, i la majoria d'ells tenen sistemes individualitzats de determinació dels sous. La idea general que ens hem fet és que segueixen aproximadament els salaris de les categories equivalents a les universitats públiques, però sempre amb quantitats una mica superiors, tant per la raó d'atraure investigadors de fora del país com per la raó d'evitar que els investigadors vulguin deixar

els seus llocs per ser professors dels cossos universitaris.

Els **professors d'universitat jubilats**, si tenen un nombre suficient d'anys de servei, tots tenen la pensió pública màxima, que el 2016 ha estat de 35.941,92 euros ([3]). La mateixa quantitat s'aplica als professors d'ensenyament secundari.

Pel que fa a **professors a l'estranger**, a escala de *associate* i *full professors*, les quantitats són molt variables. EUA, especialment, és un d'aquests casos: pot anar des de 90.000 fins a 250.000 dòlars, i fins i tot més de 500.000 dòlars en casos excepcionals. Pel que hem mirat i preguntat, diríem que la xifra estàndard és entre 130.000 i 170.000 dòlars.

A Alemanya sembla que el més normal és entre 75.000 i 90.000 euros (professors W2 i W3, que són com titular i catedràtic). Però com a funcionaris paguen un 20% menys d'impostos que la resta de treballadors. A Suïssa: entre 175.000 i 267.000 francs suïssos.

A França, el primer nivell de professor permanent és el de *maître de conférences*, per la qual cosa el mínim oficial és 25.000 euros, però tot sovint comencen amb 31.000 euros i poden cobrar fins a 45.000 euros. Per damunt d'aquest topall hi ha el nivell de *professeur des universités*: el mínim que poden cobrar són 37.000 euros, i si ocupen la categoria més alta, 74.000 euros (a això s'hi poden sumar les *bonifications indiciaires*, les «primes» i les *indemnités*).

### Docència a l'ensenyament secundari

A l'**ensenyament públic**, la retribució anual per als professors d'ensenyament secundari és d'uns 32.000 euros, i d'uns 34.000 euros per als catedràtics [4]. Més o menys, els triennis d'antiguitat representen un increment de l'1% cada tres anys. A més dels triennis, aquests llocs de treball poden rebre els estadis de promoció docent, de vegades anomenats **sexennis**. Els estadis es poden començar a cobrar a partir del novè any, i els següents cada sis anys, fins a un màxim de cinc. Cada estadi representa un increment de prop del 4%. Per exemple, un professor amb 35 anys d'antiguitat i tots els complements possibles, podria arribar a cobrar gairebé 45.000 euros bruts.

Alguns docents de l'ensenyament públic també reben complements com el de director,

secretari, cap d'estudis, coordinador, cap de seminari, etcètera.

El sou dels **professors d'ensenyament secundari interins** de l'àmbit públic s'equipara al dels funcionaris. Sense triennis ni cap complement, voltaria uns 32.000 euros bruts l'any. Hem pogut tenir accés a una nòmina del febrer del 2017 d'un professor interí en un institut d'ensenyament secundari: 2.448,10 euros bruts i 2.111,07 nets. Naturalment, això també depèn de la casuística personal.



Aquests professors interins de vegades no cobren la nòmina de juliol ni la d'agost ni les parts proporcionals d'aquestes en les pagues extraordinàries si els contractes només són de setembre a juny, però això ja és un altre tema.

Els salaris de les **escoles privades concertades** són públics. Poden trobar-se a [5]. Pel que s'estableix, un professor d'ESO i batxillerat que imparteixi 24 hores de classe a la setmana rebria un salari brut anual d'almenys 26.000 euros, sense comptar triennis ni estadis. Tampoc hem comptat els plusos que es poden cobrar per la tutoria, la mitja pensió, la nocturnitat, la coordinació d'alguna etapa, etcètera, però tenen un pes relativament petit. Potser, en molts casos, els sous s'acaben equiparant als de l'ensenyament públic.

A les escoles privades concertades els estadis també es comencen a cobrar a partir del novè any en una mateixa escola, i els següents cada sis anys. Però el compte de triennis i estadis

torna a zero quan un professor canvia de centre. La càrrega docent, que ja hem dit que és de 24 hores per setmana, contrasta amb la de l'ensenyament públic, que és de 20 hores. Però això també és un altre tema.

### Empresa privada

Per a feines a l'**empresa privada** els salaris poden arribar a ser molt diferents, depenent del sector, l'empresa, i el treballador, i per tant és impossible presentar un rang de salaris en què s'inclouin tots els matemàtics. Som conscients que per a totes les dades que exposarem a continuació hi ha contraexemples i/o *outliers*, en el sentit que hi ha gent que es troba fora (per dalt o per sota) d'aquests rangs salarials. Tot i així, creiem que aquestes dades poden ser útils i donen una resposta (informal i aproximada) a la pregunta que ens motiva.



Després de preguntar a diversos exestudiants de matemàtiques d'entre 25 i 30 anys que treballen a Catalunya, hem observat el següent:

El salari inicial d'un graduat (o llicenciat) en matemàtiques a l'empresa privada oscil·la entre els 15.000 i els 24.000 euros anuals. Un cop ja es té més experiència els salaris passen a dependre cada vegada més de la persona i del seu recorregut a l'empresa. En molts casos, els matemàtics amb una experiència d'entre un i tres anys tenen salaris d'entre 20.000 i 35.000 euros anuals, mentre que amb una experiència de quatre a vuit anys se situen entre 25.000 i 60.000 euros anuals. Com hem dit abans,



això no vol dir que no hi hagi gent que cobri més (i menys) del que hem apuntat, sinó que hem intentat presentar uns rangs salarials on es trobin una majoria dels matemàtics que treballen a l'empresa privada.

## Referències

[1] «Resolució del MECD» del 19/11/2015, BOE del 27/11.

[2] «Taules retributives del personal docent i investigador. Any 2016». UPC.

[3] «Pressupostos Generals de l'Estat 2016». BOE del 29/10/2015, art. 39.

[4] Departament d'Ensenyament. «Taules de retribució».

[5] «Privada concertada. Retribucions del personal docent. Any 2016». CCOO Educació: <http://concertada.ccoo.cat>.

## Després de més de 50 anys, s'ha provat la conjectura GCI: una història ben particular

Josep Lluís Solé i Clivillés

Departament de Matemàtiques de la UAB

En un article del *Quantamagazine* [10] del passat mes de març hi apareix la notícia que Thomas Royen, un matemàtic jubilat, havia provat la conjectura GCI (*gaussian correlation inequality*), formulada originalment els anys cinquanta, [1] i [2], dins del context d'interval de confiança simultanis. Aquesta prova s'havia resistit des d'aleshores, i molts matemàtics hi pensaren durant llargs períodes, i se'n van publicar molts resultats parcials. Trobareu una breu història de la conjectura a les pàgines inicials de [8].



Thomas Royen

Thomas Royen havia treballat en estadística a la indústria farmacèutica, i des del 1985 fou professor a Bingen, una petita universitat alemanya. Explica que la idea per a la prova li vingué, un matí de juliol del 2014, rentant-se les dents, i a la tarda ja tenia escrita la primera versió de l'article.

Com que no coneixia el TeX, utilitzà Word i l'envià a diversos matemàtics, entre ells el professor Donald Richards, de la Universitat de Pennsilvània, el qual durant trenta anys havia intentat trobar una demostració de la conjectura. Richards de seguida veié que la prova era correcta, i ajudà Royen a escriure-ho en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. A l'agost la preimpresió es va penjar a Arxiv.

L'acollida de la preimpresió per part d'altres matemàtics no fou tan entusiasta com Royen esperava. S'ha de tenir en compte que en els darrers anys a Arxiv s'hi penjaren diverses proves falses, i que era habitual que, amb certa freqüència, algú manifestés que havia assolit la demostració, i s'hi trobés sempre algun error.

Finalment, l'article [7] es publicà en una revista índia poc coneguda, i això fou la causa que la prova passés desapercebuda, fins que Latala i un estudiant seu, Matlak, l'escriviren d'una manera més senzilla i clara, i ho publicaren [4] els primers mesos del 2017.

Klartag es pregunta com, en una època de tanta facilitat de comunicació, sigui possible que, més d'un any després, la comunitat matemàtica no conegués l'èxit que representa haver trobat una prova del GCI, i aquest fet és el que es destaca a l'article del *Quantamagazine* [10].

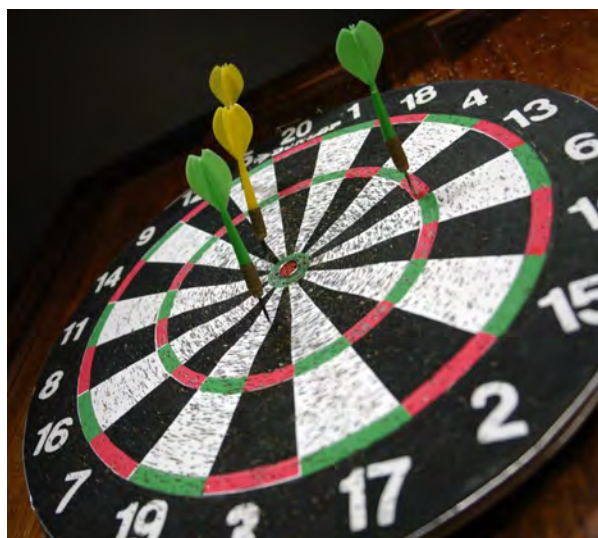
Wolchover [10] insinua que potser va ser perquè Royen no era gaire conegut, però, si mirem els seus treballs a Mathscinet, no té un currículum negligible encara que la major

part dels seus articles estan relacionats amb un tema molt específic, el de la distribució gamma multivariant, introduïda el 1951 per Parthasarathy *et al.* [6], en un article molt bonic. Precisament fer servir algunes propietats d'aquesta distribució multivariant, que havia estudiat tan a fons és el que li donà la clau de la prova, ben diferent de la de molts dels intents anteriors, que havien emprat eines i arguments molt més sofisticats. A vegades la clàssica afirmació de la navalla d'Ockham és ben encertada!

Ara comentaré què diu la conjectura GCI. Veureu que és tan clara que si fóssim matemàtics joves i atrevits, en conèixer-la afirmariem, amb un entusiasme certament agosarat: «Espera, que aquesta nit m'hi poso, i demà et diré alguna cosa».

**Conjectura GCI:** Siguin  $A$  i  $B$  dos subconjunts de  $\mathbb{R}^n$  convexos i simètrics respecte a l'origen ( $A = -A$ ), i sigui  $\mu_n$  una llei normal multivariant a  $\mathbb{R}^n$ , de vector d'esperança  $\vec{0}$  i matriu de covariàncies  $\Sigma$ . Aleshores:

$$\mu_n(A \cap B) \geq \mu_n(A)\mu_n(B).$$



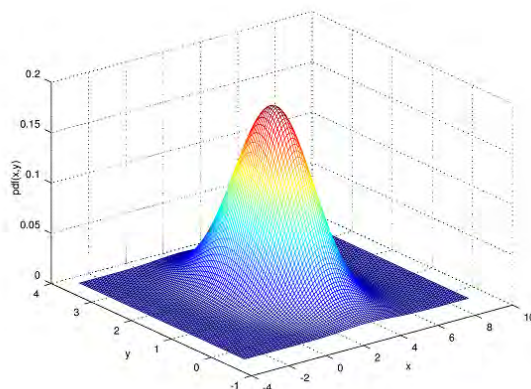
A continuació presentaré dos casos particulars d'aplicació de la conjectura. Imagineu que llanceu dards a una diana, i que la posició on es claven està modelada per un vector  $\vec{X} = (X_1, X_2)$  amb una llei normal multivariant dos dimensional centrada a l'origen, que és el centre de la diana. Agafem com a subconjunts  $A$  i  $B$  un cercle i un rectangle centrats a l'origen. Aleshores la desigualtat ens diu que la probabilitat que el dard es clavi a la intersecció

del cercle i del rectangle és igual o superior al producte de les probabilitats que es clavi en el cercle i que es clavi en el rectangle, és a dir:

$$\begin{aligned} P(\vec{X} \in \text{cercle} \cap \text{rectangle}) \\ \geq P(\vec{X} \in \text{cercle})P(\vec{X} \in \text{rectangle}). \end{aligned}$$

Per a l'altre cas, considerem el vector aleatori  $\vec{X} = (H, W)$  que modela l'altura i el pes d'una persona, i suposem que té una llei normal 2 dimensional. Anomenem  $(H_c, W_c)$  el vector centrat. Aleshores, agafant com a conjunts  $A = [a, -a] \times \mathbb{R}$  i  $B = \mathbb{R} \times [-b, b]$ , és a dir, dues bandes convexes i simètriques, la conjectura ens diu que:

$$\begin{aligned} P((H_c, W_c) \in A \cap B) \\ = P(H_c \in [a, -a], W_c \in [-b, b]) \\ \geq P((H_c, W_c) \in A)P((H_c, W_c) \in B) \\ = P(H_c \in [-a, a])P(W_c \in [-b, b]). \end{aligned}$$



La idea de la prova és clara. Tot conjunt convex i simètric el podem escriure com una intersecció numerable de bandes simètriques, i per tant n'hi ha prou de provar la conjectura quan, fixats  $n_1$  i  $n_2$ , amb  $n_1 + n_2 = n$ , uns números positius  $t_1, \dots, t_n$ , i també  $n$  vectors  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ , els conjunts  $A$  i  $B$  són de la forma:

$$\begin{aligned} A &= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\langle \vec{x}, \vec{v}_i \rangle| \leq t_i, i=1, \dots, n_1 \}, \\ B &= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\langle \vec{x}, \vec{v}_i \rangle| \leq t_i, i=n_1+1, \dots, n \}. \end{aligned}$$

Com una transformació lineal d'una variable gaussiana multivariant és també gaussiana, definint

$$\begin{aligned} \vec{Y} &= (Y_1, \dots, Y_n) \\ &= (\langle \vec{X}, \vec{v}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{X}, \vec{v}_n \rangle), \end{aligned}$$

podem escriure la conjectura de la manera següent:

**Conjectura GCI:** Fixats  $n_1$  i  $n_2$  tals que  $n_1 + n_2 = n$ , uns números no negatius  $t_1, \dots, t_n$ , i un vector gaussià centrat  $\vec{Y}$ , aleshores:

$$\begin{aligned} &P(|Y_1| \leq t_1, \dots, |Y_n| \leq t_n) \\ &\geq P(|Y_1| \leq t_1, \dots, |Y_{n_1}| \leq t_{n_1}) \\ &\quad \times P(|Y_{n_1+1}| \leq t_{n_1+1}, \dots, |Y_n| \leq t_n). \end{aligned}$$

Quan  $n_1 = 1$ , la conjectura fou provada independentment per Khatri [3] i Sidak [9] el 1967. D'altra banda, el cas  $n = 2$  el va demostrar Pitt [5] el 1977 utilitzant que la integral del producte de gradients de funcions suaus quasi-còncaves, que no s'anul·len quan  $x \neq 0$ , multiplicat per una funció no negativa tal que tan sols depèn del mòdul  $\|\vec{x}\|$  i decreixent amb  $\|\vec{x}\|$  (en particular la densitat gaussiana estàndard), no és mai negativa, desigualtat que tan sols es pot provar si les funcions estan definides en  $\mathbb{R}^2$ .

Fixem-nos que la desigualtat de la conjectura GCI és equivalent a la següent:

$$\begin{aligned} &P(Y_1^2 \leq t_1^2, \dots, Y_n^2 \leq t_n^2) \\ &\geq P(Y_1^2 \leq t_1^2, \dots, Y_{n_1}^2 \leq t_{n_1}^2) \\ &\quad \times P(Y_{n_1+1}^2 \leq t_{n_1+1}^2, \dots, Y_n^2 \leq t_n^2). \end{aligned}$$

En particular Royen provà aquesta desigualtat per a un vector  $(Y_1^2, \dots, Y_n^2)$  amb una llei n-gamma  $\Gamma(\alpha, R)$ , amb  $\alpha$  tal que  $2\alpha \in \mathbb{N}$ , i  $R$  una matriu de correlacions no singular [6]. Aquesta llei, com hem dit abans, era ben coneguda per Royen. El cas concret de la conjectura correspon a  $\alpha = \frac{1}{2}$ . La transformada de Laplace de la distribució  $\Gamma(\alpha, R)$  és

$$|I_n + RT|^{-\alpha},$$

amb  $I_n$  la matriu identitat, i  $T$  la matriu  $\text{diag}(t_1, \dots, t_n)$ .

La demostració de Royen es basa en el fet que si tenim la matriu de correlacions  $R$  de la llei gaussiana i l'escrivim en submatrius

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

de manera que la dimensió de  $R_{11}$  és  $n_1 \times n_1$ , la de  $R_{12}$ ,  $n_1 \times n_2$ , i la de  $R_{22}$  és  $n_2 \times n_2$ , totes de rang màxim, llavors, per  $0 \leq t \leq 1$ , la matriu

$$R_t := \begin{pmatrix} R_{11} & tR_{12} \\ tR_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

és també una matriu de correlacions.

Royen considera el vector aleatori  $(Y_1(t)^2, \dots, Y_n(t)^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , amb una llei  $\Gamma(\alpha, R_t)$ . Aleshores, el terme de l'esquerra de la conjectura GCI correspon al cas  $t = 1$ , ja que  $R = R_1$ , i per tant coincideix amb la funció de distribució d'una llei  $\Gamma(\alpha, R_1)$ , que anomena  $F(s_1, \dots, s_n, \alpha, R)$ . D'altra banda, el terme de la dreta, on hi ha la factorització, correspon a  $t = 0$ , i és la funció de distribució de la llei  $\Gamma(\alpha, R_0)$ .

Per tant, la conjectura quedarà provada si en mirar la funció de distribució com una funció del paràmetre  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , la derivada respecte a  $t$  és no negativa, és a dir:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(s_1, \dots, s_n, \alpha, R_t) \geq 0.$$

Per confirmar que la derivada no és mai negativa, Royen utilitza les propietats de les lleis gamma multivariants que coneix molt bé, però això dificulta la lectura de l'article a un matemàtic no familiaritzat amb aquestes distribucions. És per aquest motiu que Latala i Matlak [4] tornaren a escriure, de manera més entenedora, la prova en el cas particular  $\alpha = \frac{1}{2}$ , i fou el seu article el que va donar a conèixer el treball de Royen a la comunitat matemàtica.

## Referències

- [1] C.W. Dunnett, M. Sobel. *Approximations to the probability integral and certain percentage points to a multivariate analogue of Student's t-distribution*. Biometrika **42** (1955), 258–260.
- [2] O.J. Dunn. *Estimation of the means of dependent variables*. Ann. math. Stat. **29** (1958), 1095–1111.
- [3] C.G. Khatri. *On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds*. Ann. Math. Stat. **38** (1967), 1853–1867.
- [4] R. Latala, D. Matlak. *Royen's proof of the gaussian correlation inequality*. Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar (GAFA). Springer, (2017), 265–274.

- [5] L. Pitt. *A gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*. Ann. Prob., **5**(3) (1977), 470–474.
- [6] A.S. Krishnamoorthy, M. Parthasarathy. *A multivariate gamma-type distribution*. Ann. Math. **22** (1951), 549–557.
- [7] T. Royen. *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to multivariate gamma distributions*. Far East Journal Theor. Stat. **48** (2014), 139–145.
- [8] G. Schechtman, T. Schlumprecht, J. Zinn. (1967) *On the gaussian measure of the intersection*. Ann. Prob. **28**(1) (1967), 346–357.
- [9] Z. Sidak. *Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions*. J. Amer. Stat. Assoc. **62** (1967), 626–633.
- [10] N. Wolchover. *A long-sought proof found and almost lost*. Quantamagazine (2017). (<https://www.quantamagazine.org/>)

## La ciència dels sistemes complexos al Centre de Recerca Matemàtica

Álvaro Corral, Alex Roxin i Tomás Alarcón  
Centre de Recerca Matemàtica

### Els sistemes complexos

Durant els darrers cent anys, la física ha procedit a expandir les seves fronteres cap al més petit (l'àtom, el nucli, els quarks) i cap al més gran (les galàxies, l'expansió de l'univers...), la qual cosa ha requerit i propiciat important avenços matemàtics.

Podem trobar una altra frontera de la ciència molt més a prop nostre: la dels sistemes complexos. I què són els sistemes complexos? Si fossin fàcils de definir voldria dir que no són complexos; de tota manera, com en altres coses a la vida, podem reconèixer un sistema complex quan el veiem: un fluid turbulent, el clima, l'economia, la política, la cèl·lula, el cervell, els ecosistemes, les ciutats, internet... Pràcticament tots els problemes que afronta la humanitat al segle XXI venen de la nostra limitada capacitat de comprendre els sistemes complexos [16]. A partir d'aquesta enumeració podem constatar que algunes característiques comunes d'aquests sistemes són:

- Primer, que es componen de moltíssimes parts o unitats (al contrari que els sistemes més paradigmàtics de la física, com l'àtom d'hidrogen o el sistema solar).
- Segon, que el comportament del sistema no és caracteritzat pel comportament de les seves parts, sinó que hi ha un comportament global emergent, o, com va dir Aristòtil,

el tot és més que la suma de les parts (en contraposició al que passa amb altres paradigmes de la física, com un gas ideal o un material paramagnètic). Això vol dir que el procediment reduccionista habitual en física de descompondre el tot en les seves parts i investigar aquestes parts per separat simplement no funciona amb els sistemes complexos.

- Tercer, que són sistemes allunyats de l'equilibri (no com passa, per exemple, amb una de les fites de la física del segle XX, el model d'Ising).

L'hipotètic lector o lectora haurà notat que als nostres exemples hem barrejat sistemes que pertanyen a disciplines diverses: la física, les ciències socials, la biologia... Llavors, la ciència dels sistemes complexos és una part de la física? Potser pel que va dir l'eminent físic Sam Edwards, que física és allò que fan els físics, simplement [3]. Certament, avui dia un gran nombre de físics han començat a estudiar aquesta mena de sistemes, avorrits dels recargolaments infructuosos de les teories de cordes, supercordes, etcètera [5, 11].

Al Centre de Recerca Matemàtica (CRM), de Bellaterra, creiem que la ciència dels sistemes complexos és massa complexa per deixar-la només als físics (i encara més als biòlegs, sociòlegs, etcètera) i que els matemàtics no

sols tenen cabuda en aquesta empresa sinó que poden tenir un paper principal.

Realment, l'equació de Schrödinger, les equacions de Maxwell o la relació de Clausius-Clapeyron no formarien part del bagatge general per endinsar-se en aquesta recerca, però sí la teoria dels sistemes dinàmics, la dels processos estocàstics, la de la informació, la de jocs, la topologia de xarxes, les equacions en derivades parcials, els mètodes numèrics, l'estadística i l'anàlisi de *big data*, la intel·ligència artificial, etcètera [9]. En realitat, podríem considerar la ciència dels sistemes complexos no com una part de la física, sinó com una «ciència total», pel seu caràcter eminentment interdisciplinari, però en la qual una bona base en matemàtica aplicada i tècniques de simulació és imprescindible.

A banda de l'interès de cada sistema particular, la qüestió clau és: com pot ser que l'univers va començar amb uns pocs tipus de partícules elementals i va arribar a la vida, la història, l'economia, i la literatura? Per què el Big Bang no va formar un gas simple de partícules o va condensar en un gran pedrot? En definitiva, per què a totes les escales apareix complexitat [1]?

De fet, les primeres idees sobre sistemes complexos a Catalunya van aparèixer en el camp de la biologia, gràcies a l'agudesa del gran ecòleg Ramon Margalef. La seva empenta va influir l'inquiet físic Jorge Wagensberg, però no va ser fins a principis dels anys noranta que es va iniciar la consolidació de la ciència dels sistemes complexos a Catalunya, mitjançant uns pocs investigadors joves, que, de manera independent i un xic solitària, van decidir cabussar-se en aquest món. Gairebé amb tota seguretat, els camps més conreats són el dels sistemes biològics i les xarxes complexes, però els tentacles d'aquesta comunitat arriben avui dia fins a l'anomenada econofísica, la lingüística (lingüística quantitativa), la geociència no lineal, i tornen finalment cap a la mateixa física.

Des del Centre de Recerca Matemàtica volem incentivar la participació de joves matemàtics en la ciència dels sistemes complexos (joves de qualsevol edat). Els grups de recerca del centre amb connexió més directa amb la complexitat són el Grup de Sistemes Complexos, el Grup de Neurociència Computacional

i el Grup de Biologia Matemàtica i Computacional. Tot seguit resumim les idees de la seva recerca.

## Desastres naturals i formes de comunicació

El grup del CRM que es va apropiat del nom dels sistemes complexos centra la seva investigació en fenòmens que presenten propietats estadístiques «anòmales», en el sentit que es caracteritzen per distribucions de probabilitats amb cues llargues i sense moments (sense variància i inclús sense mitjana). Hi ha dos sistemes fonamentals amb aquestes característiques, que s'han estudiat en el grup: els desastres naturals i el llenguatge humà.

Considerem l'energia radiada pels terratrèmols. Un sisme de magnitud 6 té associada una energia similar a la de la bomba d'Hiroshima, mentre que un de magnitud 8 radia una energia mil vegades més gran. Un hipotètic megaterratrèmol de magnitud 10 seria  $10^6$  vegades més energètic que un de magnitud 6 (la magnitud és, doncs, una escala logarítmica de l'energia).

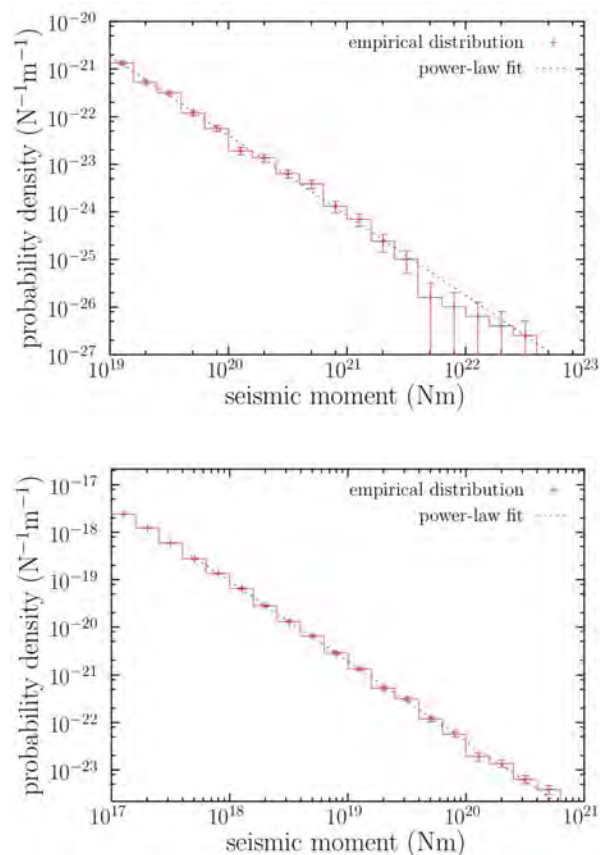
Si en una certa zona fem l'estadística del nombre de terratrèmols en funció de la seva energia, obtenim que, afortunadament, n'hi ha molts de petits i pocs de grans. En concret, la densitat de probabilitat de l'energia  $f(E)$  segueix la llei de Gutenberg-Richter [2],

$$f(E) \propto \frac{1}{E^\beta},$$

és a dir, la probabilitat  $f(E)dE$  que un terratrèmol tingui energia a l'interval entre  $E$  i  $E + dE$  és una llei de potències (inversa) de l'energia, amb un exponent universal  $\beta$  proper a 1,7 o  $5/3$  (vegeu la figura, el símbol  $\propto$  a l'equació indica proporcionalitat).

Aquestes distribucions són molt diferents de les distribucions habituals, com per exemple la coneguda campana de Gauss, que es caracteritza per un valor mitjà i unes certes fluctuacions al voltant d'aquest valor, quantificades per la desviació típica. En canvi, una llei de potències amb un exponent entre 1 i 2 no és que tingui unes fluctuacions enormes, perquè la desviació típica és infinita, sinó que el valor mitjà és també infinit. Una altra propietat de les lleis de potència és la invariança d'escala, que s'il·lustra a la figura (on el moment sísmic

es pot considerar proporcional a l'energia). Encara que aquestes distribucions semblin molt contraintuïtives, la teoria de la probabilitat té eines ben establertes per entendre-les.



Per tant, malgrat que els terratrèmols grans siguin una minoria, són els responsables de l'alliberament de la major part de l'energia, la qual cosa significa un fet molt poc afortunat, contràriament a la conclusió que semblava que ens duia la llei de Gutenberg-Richter.

Com es pot trobar una teoria per explicar una llei tan peculiar com la de Gutenberg-Richter? Una característica dels sistemes complexos és que eludeixen la modelització detallada, precisament per la seva complexitat. Així, els models han de ser més conceptuals que detallats.

Podem considerar que un terratrèmol comença amb una fractura en una regió molt petita, elemental, d'una falla. Aquesta fractura es propagarà o no a les regions veïnes d'una manera aleatòria; a una regió només amb probabilitat  $p_1$ , a dues regions amb probabilitat  $p_2$ , a tres amb  $p_3$ , etcètera i a cap amb  $p_0$ . Si la fractura es propaga, a aquestes noves regions se'ls aplica la mateixa regla aleatòria,

amb independència del que hagi succeït abans [2].

Aquest algorisme tan simple no és res més que el procés de ramificació de Galton i Watson, que té una història gloriosa en la teoria dels processos estocàstics, ja que va ser descobert i redescobert per a l'estudi de l'extinció de les famílies aristocràtiques o per a la investigació de les reaccions nuclears a les primeres bombes atòmiques.

El resultat és que el model presenta una «transició de fase» (com els sistemes termodinàmics) en funció únicament del valor mitjà de la distribució del «nombre de fills». Si aquest és més petit que 1, el procés (la població) s'extingeix més o menys ràpidament, i la distribució del nombre total d'elements (individus, o regions que es fracturen) decau amb rapidesa (exponencialment), la qual cosa és incompatible amb la llei de Gutenberg-Richter.

Si la mitjana del nombre de fills és més gran que 1, llavors el procés té una tendència al creixement maltusià, és a dir, a l'increment exponencial, que tampoc s'adapta al comportament dels terratrèmols. Però si la mitjana del nombre de fills és exactament 1 —i només en aquest cas crític—, aleshores es recupera una llei de potències.

De tota manera, cal una justificació del fet que els terratrèmols estiguin precisament en el «punt crític» del procés de ramificació. Aquest encert no pot ser casualitat. La idea de la criticitat autoorganitzada proporciona una explicació molt enginyosa, mitjançant la idea del model de la pila de sorra, que deixem que els interessats busquin a la literatura científica [1] o a internet.

En realitat, el procés de propagació a aquests models és tan genèric que s'aplica no només a terratrèmols, sinó també a moltes altres catàstrofes naturals que tenen lloc en forma d'allaus, com els incendis forestals, les erupcions volcàniques, o l'extinció de les espècies. Una idea més clara de la recerca del grup en aquests temes la donen les referències [6, 13].

Canviant completament de tema (però no de context matemàtic) podem agafar un llibre, per exemple *El Quijote* i, en lloc de llegir-lo (que implica molt temps), podem comptar

quantas vegades surt cada paraula (de fet, ho farà l'ordinador això). Resulta que unes poques paraules surten moltes vegades («de», «y», «el», etcètera) mentre que moltes paraules surten molt poc («lagaña», «sonscado», «zahareña», etcètera), però amb una continuïtat en la «rarsa» de les paraules, és a dir, no hi ha una divisió clara entre paraules comunes i paraules rares.

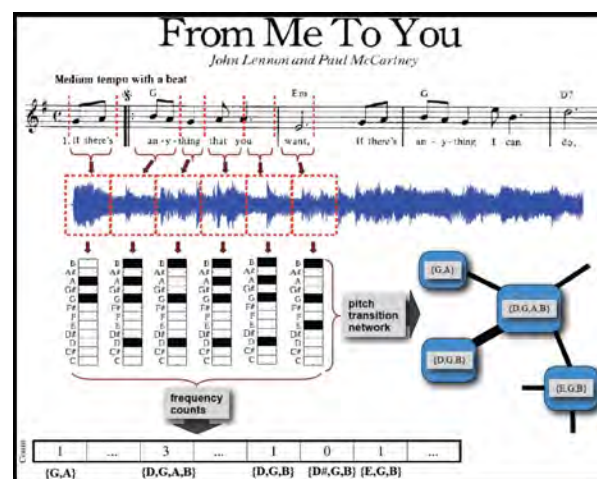
De fet, la llei que segueix la repetició de les paraules és la mateixa que l'energia dels terratrèmols, i s'anomena «llei de Zipf», en honor al lingüista que la va descobrir a la primera meitat del segle XX. És molt remarcable que també s'ha proposat que segueixen aquesta llei la població de les ciutats d'un país, el nombre de treballadors de les seves empreses, el nombre de seguidors de cada religió, el nombre d'enllaços en una pàgina web, el nombre d'insectes en una planta, la repetició dels diferents acords en una peça musical, i molts més sistemes socials, tecnològics i biològics. La llei de Zipf descriu una característica de sistemes d'aquesta mena, però aquests presenten més regularitats estadístiques que no tenim temps ni espai de comentar.

Encara que la descripció matemàtica sigui igual per a aquests sistemes i per als desastres naturals, l'explicació en termes de models és ben diferent, ja que no només no s'aplica ni el model de Galton-Watson ni els models de piles de sorra, sinó que no hi ha un model comunament acceptat [7].



Fa més de cinquanta anys el psicòleg George A. Miller i el lingüista Noam Chomsky van estudiar si un mico picant aleatòriament tecles en un teclat produiria un text que seguís la llei de Zipf (com a la figura). A la mateixa època, el que seria premi Nobel d'Economia Herbert

Simon va proposar un model completament diferent, en què les paraules en un text es reforcen de la mateixa manera que els rics es fan cada cop més rics (els rics guanyen més diners de la mateixa manera que «de» guanya més repeticions que «lagaña» a *El Quijote*). Aquest model va ser criticat pel famós matemàtic Benoit B. Mandelbrot, que va proposar el seu propi basat en la teoria de la informació, i naturalment, Simon va replicar Mandelbrot... I així als nostres dies, en què el model més recent que tenim constància consisteix en les urnes de Pólya a les quals s'introdueixen boles noves per tenir en compte la innovació que dona lloc a la llei de Zipf. Alguns treballs del grup en aquesta línia, incloent la figura, són les referències [12, 4].



Com podeu comprovar aquests sistemes presenten molts problemes oberts, que al CRM intentem entendre i potser resoldre amb les millors eines matemàtiques que tenim al nostre abast.

## Neurociència computacional

Se sol dir que el cervell humà és el sistema més complex que coneixem. Però en realitat el cervell comparteix moltes característiques «complexes» amb altres sistemes biològics, com ara la presència de múltiples escales espacials i temporals. El fet que d'entre tots els sistemes biològics coneguts, el cervell hagi estat l'únic que ha donat lloc a la intel·ligència i a la consciència, fa creure que aquest òrgan té quelcom d'especial. Amb el temps els misteris del cervell han anat cedint pas al mètode científic. Així doncs, com qualsevol sistema natural, el cervell obeeix les lleis de la física i es pot estudiar

fent servir les mateixes eines experimentals i analítiques que han revolucionat el nostre món els darrers 200 anys.

Un dels reptes més importants de les neurociències és entendre com la interacció de milions de cel·lules cerebrals, anomenades «neurons», dona lloc al comportament animal. Les neurones es comuniquen mitjançant senyals elèctrics i químics que es propaguen a través d'una xarxa (també complexa!) de connexions. Per tant, des d'aquest punt de vista, el problema d'entendre el funcionament del cervell es redueix a l'estudi de la dinàmica en xarxes d'elements excitables. La situació es complica pel fet que les connexions entre les neurones, i per tant l'estructura de la xarxa, també té la seva pròpia dinàmica. De fet, aquesta dinàmica de la connectivitat neuronal, anomenada «plasticitat sinàptica», està correlacionada amb l'aprenentatge. Això vol dir que quan aprenem alguna cosa, la xarxa de connexions del nostre cervell canvia.

Acabem de descriure els tres ingredients fonamentals per entendre el cervell: l'estructura, la dinàmica i la plasticitat. Malauradament (o potser per sort perquè d'alguna manera d'aquí sorgeix la intel·ligència animal i humana) aquests tres ingredients s'entrellacen en una dansa permanent i constant al llarg de la vida dels organismes.

Al Grup de Neurociència computacional del CRM estudiem cadascun d'aquests pilars del funcionament cerebral. D'una banda, se sap relativament poc sobre l'estructura precisa de les xarxes neuronals. Ens interessa especialment la dels circuits corticals, o de l'escorça cerebral, que és la seu de la capacitat cognitiva en els mamífers. De l'altra, les poques dades de què disposem provenen d'experiments tècnicament molt complexos en què es pot arribar a determinar la matriu de connectivitat d'una dotzena de neurones, com a màxim. Per tant, actualment hem d'inferir l'estructura global de xarxes grans (creiem que la unitat computacional al còrtex està formada per centenars, milers o moltes més neurones) a partir d'informació parcial i de mostres molt petites. Una manera d'enfrontar-se a aquest problema és considerar diverses classes de xarxes amb estructura global coneguda, i estudiar-ne l'estadística obtinguda només mirant mostres petites [15]. D'aquesta manera, hem aconseguit demostrar que els circuits corticals no tenen una simple estructura

d'agrupaments neuronals (*clusters* en anglès) com s'havia cregut fins ara, sinó que els clústers estan organitzats de forma jeràrquica.

Pel que fa a la dinàmica neuronal, volem destacar un avenç teòric recent del grup. L'estudi del comportament col·lectiu de grans conjunts de neurones recorda els treballs clàssics de la física estadística, com per exemple la teoria dels gasos ideals. Aquesta teoria té com a objectiu descriure l'estat macroscòpic d'un sistema a partir de les interaccions microscòpiques de moltíssimes partícules. A diferència de les partícules d'un gas, les neurones tenen una dinàmica relativament complicada, i les seves interaccions també poden ser complexes. Per aquest motiu, el desenvolupament d'una teoria macroscòpica (o de camp mitjà) del teixit neuronal, ha estat fins avui sobretot una teoria heurística. És a dir, que no s'han pogut derivar les equacions de camp mitjà a partir de lleis fonamentals (les dels elements constituents), tret d'alguns casos molt especials. Aquí nosaltres ens hem beneficiat d'una col·laboració amb físics teòrics experts en la teoria de sincronització, en la qual també s'estudia la dinàmica col·lectiva de sistemes de molts elements, en aquest cas d'oscil·ladors. En aquella àrea s'havien desenvolupat les eines matemàtiques necessàries per derivar equacions de camp mitjà exactes a partir de les lleis microscòpiques [10], i així s'obtenia, entre molts resultats, una solució exacta del famós model de Kuramoto. Resulta que alguns models neuronals (que descriuen la dinàmica del voltatge de les cel·lules individuals) es poden transformar en oscil·lador, mitjançant un canvi de variables que transforma el voltatge en la fase de l'oscil·lador. Aquesta correspondència ens va permetre derivar una equació de camp mitjà exacte per a xarxes anomenades *quadratic integrate-and-fire neurons* (neurones quadràtiques de tipus integra-i-dispara), un model canònic per descriure l'activitat neuronal [8].

Per acabar, arribem a la plasticitat neuronal, el mecanisme més plausible per explicar la formació dels records i l'aprenentatge en el sistema nerviós. Diem «plausible» perquè fins ara això només s'ha demostrat directament en animals molt simples, com ara el llimac marí (treball pel qual el neurocientífic Eric Kandel va rebre el premi Nobel l'any 2000).



La teoria sinàptica de la memòria mira d'explicar els canvis en les connexions neuronals (o pesos sinàptics) provocats per l'activitat neuronal resultant d'un estímul sensorial. Aquests canvis, al seu torn, han de ser reproduïbles espontàniament, sense la necessitat de cap estímul. És a dir, que la xarxa neuronal que fem servir per investigar la teoria sinàptica hauria de ser capaç de produir patrons d'activitat espontanis que s'assemblin als patrons provocats per l'experiència sensorial. Això és el que volem dir quan diem que «ens recordem» d'alguna cosa!

Al CRM estudiem aquest procés modelitzant l'aprenentatge espacial en rosegadors. Triem aquest paradigma experimental perquè ha estat molt estudiat per neurocientífics que van identificar a l'hipocamp de les rates neurones espacialment selectives, les cèl·lules «de lloc» (*place cells*, en anglès). Quan l'animal passa per un lloc determinat, aquestes neurones s'activen amb un ordre molt ben definit i depenent de la selectivitat de cada cèl·lula. Més tard, quan l'animal dorm, s'observen les mateixes seqüències (o gairebé) precisament com prediu la teoria sinàptica! En un model molt simplificat de cèl·lules de lloc podem demostrar que la plasticitat sinàptica durant l'exploració d'un entorn nou produeix canvis de la connectivitat recurrent (entre les neurones de la mateixa xarxa) que reflecteixen la geometria de l'entorn. Això és perquè la selectivitat de les cèl·lules de lloc (que és equivalent a l'ordre de les seqüències) és diferent i única per a cada entorn. Quan aquests canvis són prou grans, produeixen una transició de fase a la xarxa i hi apareixen ones (seqüències) espontàniament [14].

Al Grup de Neurociència Computacional del CRM el nostre objectiu és entendre com funcionen els circuits cerebrals; creiem que les matemàtiques són una eina molt potent que ens ajuda a assolir aquesta fita. Tanmateix, també hem entès que, juntament amb les matemàtiques, és imprescindible conèixer a fons el sistema biològic que pretenem modelitzar (i entendre!). Això implica col·laboracions interdisciplinàries. En particular hem d'estar disposats a analitzar dades rellevants i, si no confirmen els nostres models, també hem d'estar disposats a replantejar-nos-ho tot.

## Modelització matemàtica dels tumors

Tot i la gran quantitat de recursos dedicats a la recerca i al desenvolupament de noves teràpies, el càncer segueix sent una de les principals causes de mort als països occidentals. En l'actualitat, s'estan desenvolupant nous conceptes terapèutics com la medicina personalitzada o la medicina de precisió a fi d'incorporar noves tecnologies (per exemple, òmics) a la pràctica mèdica. Aquests nous conceptes terapèutics sovint es basen en l'extracció d'informació específica del pacient a partir d'eines avançades de diagnòstic i, a continuació, es crea un tractament a mida, que sovint consisteix en un còctel de fàrmacs que respon a un conjunt de les anomalies detectades en un pacient en particular. Aquest enfocament és raonable però no mancat de problemes. Sovint, els metges desconeixen com els diferents fàrmacs interactuen entre si i quin serà el seu efecte global en l'estat clínic del pacient. Els efectes secundaris també són difícils d'establir *a priori*, ja que se solen detectar durant els assaigs clínics, concepte que, dins del paradigma de la medicina personalitzada, és difícil de definir. Per tal de produir protocols de medicina personalitzada eficients, hem d'entendre les interaccions entre els efectes dels diferents fàrmacs. Per això, els models matemàtics són essencials, ja que ens permeten reconèixer les interaccions no lineals entre les diferents dianes terapèutiques i predir el resultat dels tractaments personalitzats en termes racionals.

El comportament de les cèl·lules entre els teixits respon a una sèrie d'estímuls. El seu comportament és el resultat d'una complexa xarxa d'interaccions entre gens i productes genètics que, en última instància, regula l'expressió gènica. Aquests sistemes de regulació de gens solen modelar-se com a sistemes dinàmics no lineals i d'alta dimensió, l'estructura dels quals s'ha modelat en el curs de l'evolució biològica. A més de les dinàmiques complexes intracel·lulars, les cèl·lules també estan influenciades per interaccions intrincades entre diferents components dels sistemes biològics a tots els nivells, des de vies de senyalització complexes i xarxes de regulació gènica fins a efectes no locals complexos, en què les perturbacions actuen per tot el teixit. Aquests i altres factors

contribueixen a una dinàmica molt complexa en teixits biològics, la qual és una propietat emergent de totes les capes implicades. Per fer front a aquesta complexitat, s'han desenvolupat diversos models de sistemes biològics, especialment en el context del creixement del tumor.

S'ha demostrat que els enfocaments a escales múltiples tenen tant fortaleeses com limitacions. Entre les darreres, destaca la intensitat computacional d'aquests models. El nivell de detall que tenen implica que les simulacions de models d'escales múltiples són computacionalment costoses, cosa que limita l'abast d'aquests models. Per simular el creixement en un ventall més ampli de condicions, juntament amb el desenvolupament de tècniques de modelització, cal desenvolupar algorismes i mètodes analítics que ens permetin fer una anàlisi i simulació més eficients d'aquests models. La formulació de mètodes híbrids per a models d'escales múltiples de creixement de tumors és un d'aquests desenvolupaments. La base de les metodologies híbrides és utilitzar models a diferents resolucions en diferents regions del domini de simulació, on les cèl·lules (o altres estructures com els vaixells en models d'angiogènesi) es resolen individualment en alguna regió d'interès. Fora d'aquesta regió, el sistema es descriu mitjançant un model *coarse-grained* de més baixa resolució, obtingut, per exemple, mitjançant mètodes d'homogeneïtzació. El model homogeneïtzat descriu el sistema a un nivell reduït de detall però amb el benefici d'un cost computacional molt menor. Els reptes involucrats en aquestes metodologies inclouen la definició de criteris per identificar els diversos dominis, derivar models gruixuts coherents amb els seus homòlegs individuals i formular les condicions de contorn apropiades entre les regions *individual-based* i les *coarse-grained*.

Una situació semblant sorgeix en una àrea en la qual s'han dut a terme importants progressos, com ara els sistemes de reacció-difusió estocàstics. Aquests sistemes també són costosos de simular utilitzant mètodes estàndard (per exemple, variacions del mètode Gillespie), motiu pel qual sovint és necessari recórrer a mètodes híbrids. El fonament d'un mètode híbrid és que els nivells de soroll, més o menys associats amb la població local o el nombre de

partícules, no són uniformes a tot el sistema, de manera que hi ha regions on les fluctuacions tenen efectes més greus que en altres. Un exemple arquetípic d'aquesta situació és la propagació de fronts com ones viatgeres. En aquests sistemes, la població darrere del front de propagació s'apropa a la capacitat de càrrega del sistema. Si la capacitat de càrrega és prou gran, les fluctuacions a la regió del darrere seran relativament petites, de manera que el sistema es pot descriure pel límit de camp mitjà del sistema. Per contra, davant del front, les fluctuacions dominen el comportament del sistema i, per tant, cal una descripció estocàstica completa. Aquestes inhomogeneïtats en el nivell de soroll s'han explotat per formular mètodes de simulació híbrids. Segons aquesta metodologia, el límit de camp mitjà s'utilitza en regions de baix soroll que després s'acoblen a la dinàmica estocàstica completa que descriu les regions de soroll alt. L'acoblament entre les dues descripcions s'aconsegueix mitjançant condicions de frontera definides adequadament a les interfícies entre el camp mitjà i les regions estocàstiques.

La nostra activitat de recerca s'ha centrat principalment a ampliar i desenvolupar els mètodes híbrids formulats per sistemes estocàstics de reacció-difusió a models estocàstics d'escales múltiples de creixement tumoral. Aquests models consideren fluctuacions tant en el nombre de cèl·lules com en la dinàmica intracel·lular (cicle cel·lular) i, en conseqüència, qualsevol intent de formular un mètode híbrid per a aquests sistemes ha de trobar una manera d'acomodar els dos tipus de soroll. El soroll d'estructura s'associa amb soroll a escala intracel·lular i es manifesta en fluctuacions de la taxa de natalitat. Resultats recents demostren que aquesta font de soroll és almenys tan important com el soroll de la població. En particular, mostrem que la velocitat de propagació de les solucions d'ona viatgera es veu fortament afectada per les fluctuacions de la taxa de natalitat a la vora del front. Més concretament, quan es considera un model en què es tenen en consideració les dinàmiques intracel·lulars (és a dir, les fluctuacions de la taxa de natalitat), la velocitat del front d'ona se sobreestima per un percentatge força significatiu. Tanmateix, quan el model de camp mitjà *coarse-grained* s'acobla al model dinàmic po-

blacional estocàstic complet, la desviació de la velocitat d'ona es rectifica i s'obté un resultat molt més precís. Aquest resultat demostra la utilitat d'aquests enfocaments híbrids: es pot recuperar amb exactitud el comportament previst pels models més detallats, mentre que, via el *coarse-graining* d'alguns d'aquests detalls en regions on no són necessaris, el seu rendiment computacional millora notablement.

### Agraïments

Gràcies a Joan Serrà, per deixar-nos alguna de les seves figures. Valorem el finançament a través dels projectes FIS2012-31324 i FIS2015-71851-P, del MINECO i 2014SGR-1307, de l'AGAUR, així com de la Barcelona Graduate School of Mathematics, a través del Programa Maria de Maeztu (MINECO).

### Referències

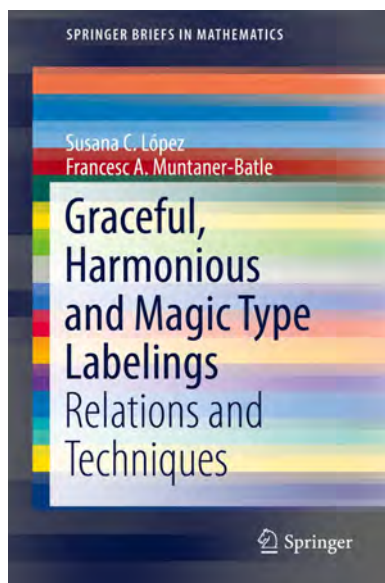
- [1] P. Bak, «How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality». Copernicus, Nova York, 1996.
- [2] A. Corral, F. Font-Clos, «Processos de ramificació, criticitat i autoorganització: aplicació als desastres naturals». Butll. Soc. Cat. Mat. **29(1)** (2014), 5.
- [3] Editorial. «A ton for Thompson's tome». Nature Phys. **13** (2017), 315.
- [4] F. Font-Clos, A. Corral, «Log-Log Convexity of Type-Token Growth in Zipf's Systems». Phys. Rev. Lett. **114** (2015), 238701.
- [5] J. Harnad, «The Trouble with Physics: The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next». The Mathematical Intelligencer **30(3)** (2008), 66.
- [6] A. Corral, A. Ossó, J. E. Llebot, «Scaling of tropical-cyclone dissipation». Nature Phys. **6** (2010), 693.
- [7] M. Mitzenmacher, «A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions». Internet Math. **1(2)** (2004), 226.
- [8] E. Montbrió, D. Pazó, A. Roxin, «Macroscopic description for networks of spiking neurons». Phys. Rev. X **5** (2015).
- [9] M. E. J. Newman, «Resource letter CS-1: Complex systems». Am. J. Phys. **79** (2011), 800,
- [10] E. Ott, T. M. Antonsen, «Low-dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators». Chaos **18** (2008), 037113.
- [11] S. Hossenfelder, «Science needs reason to be trusted». Nature Phys. **13** (2017), 316.
- [12] J. Serrà, A. Corral, M. Boguñá, M. Haro, J. Ll. Arcos, «Measuring the Evolution of Contemporary Western Popular Music». Sci. Rep. **2** (2012), 521.
- [13] I. Serra, A. Corral, «Deviation from power law of the global seismic moment distribution». Sci. Rep. **7** (2017), 40045.
- [14] P. Theodoni, B. Rovira, A. Roxin, «A model of plasticity-dependent network activity in rodent hippocampus during exploration of novel environments». BioRxiv (2017), 118489.
- [15] M. Vegué, D. Perin, A. Roxin, «On the structure of cortical micro-circuits inferred from small sample sizes». BioRxiv (2017), 118471.
- [16] D. J. Watts, «A twenty-first century science». Nature **445** (2007), 489.

## Graceful, Harmonious and Magic Type Labelings: Relations and Techniques de Susana C. López i Francesc A. Muntaner–Batle

Anna Lladó

Universitat Politècnica de Catalunya

El darrer volum de la sèrie *Springer Briefs in Mathematics* està signat per la matemàtica catalana Susana C. López, el matemàtic mallorquí Francesc A. Muntaner–Batle, i està dedicat al tema d'etiquetaments en grafs.



El món dels etiquetaments sorgeix a mitjan segle XX motivat per una conjectura formulada per Gerhard Ringel el 1963 que diu que qualsevol arbre amb  $m$  arestes descompon el graf complet d'ordre  $2m + 1$ . En altres paraules, les arestes del graf complet es poden partir exactament en  $(2m + 1)$  còpies d'un arbre arbitrari de  $m$  arestes.

Alex Rosa va introduir el 1967 diferents tipus d'etiquetaments en grafs assignant valors enters als vèrtexs i/o arestes del graf, de manera que aquests enters han de complir certes condicions relacionades amb el graf. Un d'aquests etiquetaments, que va ser anomenat «graciós» (*graceful* en anglès), proporciona una solució de la conjectura de Ringel. Es tracta d'etiquetar amb enters de 0 a  $m$  els vèrtexs d'un graf, de manera que les diferències en valor absolut de les etiquetes de vèrtexs adjacents siguin totes diferents. Així va aparèixer la famosa *Graceful Conjecture* de Kotzig–Ringel, que diu que qualsevol arbre de  $m$  arestes admet un etiquetament graciós.

L'utilització d'etiquetaments ha permès durant anys l'obtenció d'una quantitat considerable de famílies d'arbres que descomposaven cíclicament el graf complet corresponent.

Molts matemàtics han intentat atansar-se a la vella conjectura de Ringel de forma general. Però no ha estat fins fa pocs mesos que s'ha trobat una solució gairebé general per a arbres amb una certa restricció sobre el seu grau màxim. Les eines que Jaos, Kim, Kühn i Osthus han fet servir per obtenir el resultat, el setembre del 2016, incorporen les tècniques més sofisticades de la teoria de grafs moderna, amb una barreja de mètodes probabilistes, teoria extremal de grafs i el mètode de regularitat de Szemerédi, que són un reflex de la dificultat del problema.

Tornant d'una estada amb el professor Gerhard Ringel a la Universitat de Califòrnia, vaig proposar un pla de treball a Susana López sobre descomposicions de grafs complets bipartits en arbres, amb l'obtenció de resultats generals aproximats. D'altra banda, Toni Muntaner va arribar a la UPC de la Universitat de Michigan, on havia treballat amb Joseph Gallian i havia iniciat la recerca en el camp dels etiquetaments màgics, i amb ell vam seguir el tema en relació amb el problema clàssic dels conjunts de Sidon. Els dos autors del llibre van començar el contacte amb els etiquetaments de grafs a les seves respectives tesis doctorals, que van completar a la UPC.

L'atractiu que representa treballar amb propietats numèriques i grafs ha portat a definir i estudiar diferents tipus d'etiquetaments, en una quantitat considerable de publicacions. Joseph Gallian manté un *survey* dinàmic de l'estat de l'art en el tema que, en la seva edició del 2015, incorporava 2.264 referències. Això és una indicació de la vitalitat d'aquesta àrea de recerca.

Com expliquen els autors al prefaci, el llibre intenta donar una perspectiva general dels diferents tipus d'etiquetaments en grafs que han aparegut a la literatura, amb un èmfasi especial a descriure les seves interrelacions. El

llibre vol oferir també una visió d'algunes de les tècniques, combinatòries i algebraiques, que han resultat més efectives en aquesta disciplina d'estudi.

El llibre està organitzat en set capítols, el primer dels quals es dedica a fixar la notació i terminologia i el segon a descriure els diferents tipus d'etiquetaments de grafs que es tracten als cinc capítols següents. Aquests cinc capítols es poden llegir de manera relativament independent, incloent una bibliografia específica en cadascun d'ells. El fil conductor d'aquests capítols està molt influït pels resultats dels autors en el tema d'estudi. Així, al capítol 3 s'ofereix una panoràmica de les relacions entre els diferents tipus d'etiquetaments, que és un dels objectius reflectits en el títol del llibre i que

en bona part són fruit de les aportacions dels autors. Al capítol 4, s'inclou una bonica prova de Graham i Sloane del fet que asimptòticament gairebé cap graf admet un dels tipus d'etiquetament, anomenat «harmonios», i al capítol 5 es tracta la conjectura de que gairebé tots els arbres són «graciosos». El capítol 6 es torna a centrar en contribucions dels autors a la construcció de diversos etiquetaments, amb aplicacions a la seva enumeració, a través d'un cert producte de grafs. Aquest producte té relació amb l'assignació de voltatges usada en teoria topològica de grafs per definir immersions de grafs en superfícies. El llibre conclou amb un capítol dedicat a diverses aplicacions del mètode polinomial de Noga Alon a problemes d'etiquetatge.

## La pregunta de la *SCM/Notícies*

### Quina opinió tens de la teva participació en la primera promoció dels Bojos per les Matemàtiques?

Iolanda Guevara i Albert Avinyó  
Junta de la SCM

L'any 2013, la Fundació Catalunya-La Pedrera va crear el programa Bojos per la Ciència per a l'estímul del talent científic entre els joves. Dins d'aquest programa marc, al gener del 2015 es va posar en marxa, sota la coordinació de la Iolanda Guevara, Bojos per les Matemàtiques, una proposta conjunta de la FEEMCAT i la SCM.



Bojos per les Matemàtiques és un programa d'un any de durada, dividit en 22 sessions setmanals, dirigit als estudiants del primer any

de batxillerat de la modalitat de Ciències i Tecnologia. Més informació del programa a <http://feemcat.org/bojos/>.

L'objectiu bàsic d'aquest projecte és fomentar la vocació científica d'aquests joves i en especial el seu entusiasme per les matemàtiques.

A continuació trobareu l'opinió de sis alumnes que van seguir aquest programa, en la seva primera edició, del gener al novembre del 2016.

#### Belén Daura Enginyeria en Vehicles Aeroespacials, UPC



Bojos per les Matemàtiques va ser, sense dubte, una enorme experiència que vaig poder gaudir al llarg d'un any, a cavall de dos cursos de batxillerat, cada dissabte al matí, passant per les diferents facultats de matemàtiques de les universitats catalanes.

En el moment en què, des de l'escola, ens van presentar tot el programa de Bojos per la Ciència, vaig voler participar en el de matemàtiques. Sempre m'han agradat, i l'opció de poder ampliar els coneixements de la matèria a les diferents universitats i de manera més propera i lúdica va ser el que més em va atraure.

Vaig tenir la sort de ser seleccionada juntament amb quatre companys de l'escola. Tinc molt present la primera reunió, en què ens van anunciar l'admissió al programa: encara no sabíem els resultats de l'examen i va ser una sorpresa per a tots quan van comunicar-nos la bona notícia.

Una de les coses que més em van agradar va ser les ganes que teníem tots de parlar l'un amb l'altre i «fer pinya», més enllà de les classes: l'estona de descans era sagrada. També va ser molt positiva la manera en què es van dividir les hores de classe, ja que fèiem dues hores de teoria i dues hores d'activitats en grup. Compartíem moltes opinions, es formulaven molts dubtes i s'establia un bon diàleg entre alumnes i amb els professors. Al cap i a la fi, tots hi érem per voluntat pròpia i amb ganes d'aprendre. La sessió que més em va agradar va ser la que vam fer tots junts abans de vacances d'estiu, en què vam veure les matemàtiques en bombolles de sabó, llum i figures fetes amb tubs... Fins i tot vam improvisar una cursa d'icosàedres gegants, amb tots els que cabéssim a dins, al voltant del claustre de la Facultat de Matemàtiques de la UB!

Ser de la primera edició dona l'avantatge de poder suggerir noves idees i criticar (constructivament, és clar) allò que no ens ha agradat tant o que es podria millorar. El programa és dinàmic i està en continu canvi al llarg de les diferents edicions, de manera que ens omple d'orgull veure com, any rere any, va millorant i mantenint les sessions que més ens van agradar a nosaltres.

Molts dels meus companys han acabat estudiant matemàtiques, ja sigui perquè ho tenien clar des del principi, perquè participar al Bojos per les Matemàtiques els va acabar de convèncer, o bé perquè es van enamorar d'alguna de les facultats. En el meu cas particular, tenia molt clar des dels 14 anys que volia estudiar aeronàutica. Actualment, estudio enginyeria en vehicles aeroespacials a la UPC i soc membre de l'equip MotoSpirit UPC, un

programa en què un equip de 13 estudiants d'enginyeria de l'escola ha de dissenyar i construir una motocicleta elèctrica de competició per després córrer contra altres universitats a escala internacional.

Crec que haver participat al Bojos m'ha ensenyat, sobretot, a encarar els problemes i els reptes des d'altres perspectives; m'ha ensenyat a pensar de manera més oberta i, a la vegada, més precisa. Amb Bojos per les Matemàtiques he pogut conèixer un increïble grup d'amics que, després de dos anys, encara mantenim el contacte. Ho repetiria sense dubtar-ho.

## **Tània Díaz** **Matemàtiques, UB**



Em dic Tània Díaz i estic cursant el grau de Matemàtiques a la Universitat de Barcelona. Vaig tenir la sort de formar part de la primera promoció dels Bojos per les Matemàtiques quan estava a primer de batxillerat i recomanaria l'experiència a qualsevol alumne a qui agradin les matemàtiques.

Vaig conèixer el programa gràcies a la meua professora, que em va comentar que semblava interessant i em va animar a presentar-m'hi. Estava estudiant el batxillerat tecnològic i la meua assignatura preferida sempre ha estat matemàtiques. Sabia que volia estudiar un grau en què les matemàtiques tinguessin molt pes, però gràcies al Bojos vaig decidir-me.

Em va servir per tenir una idea de com seria el grau, ja que no s'assembla pràcticament gens a l'assignatura de batxillerat. Cada dissabte era un repte nou, a l'institut havíem d'anar per feina per estudiar tot el temari però els dissabtes podíem divertir-nos amb més tranquil·litat i aturar-nos per fer totes les preguntes que volguéssim. De vegades era més fàcil matinar els dissabtes que qualsevol dia entre setmana.

Per aquest motiu crec que cal donar molta més rellevància a aquest tipus d'activitats. Cal informar i motivar els estudiants perquè intentin formar-se també fora de l'institut; que comencin a buscar el camí que volen seguir després dels estudis obligatoris. Crec que moltes vegades és l'única manera de descobrir què és el que t'agrada de debò.

Va ser molt interessant trobar-se amb estudiants de la mateixa edat i les mateixes inquietuds, mai abans havia coincidit amb tanta gent que s'emocionés amb les matemàtiques i crec que això ens motivava molt. Vaig fer amics amb qui ara vaig a la universitat i comparteixo el dia a dia.

He notat molt el canvi de l'institut a la universitat i crec que haver participat en el Bojos per les Matemàtiques m'ha ajudat a fer aquest salt. Sense adonar-me'n vaig aprendre molt sobre el llenguatge de les matemàtiques i com es treballen. Quan vas a l'institut pràcticament no veus textos matemàtics, ni fas demostracions; llavors arribes a la universitat i has d'assimilar no només conceptes, sinó una nova manera de pensar i raonar. En aquest sentit, el programa és una gran ajuda.

Recordo que quan va acabar el programa no podia esperar a començar la universitat. Valoro molt la oportunitat de poder participar en el Bojos, i crec que és important donar opcions als estudiants de batxillerat per formar-se i trobar allò que els motiva. Són dos anys de molta feina i estrès que es poden fer molt pesats si no hi ha un objectiu que realment t'il·lusioni al final.

### Marta Llagostera Bioinformàtica, UPF-UB-UPC



Les matemàtiques sempre m'han agradat, i a mesura que passaven els anys, sense pretendre-ho voluntàriament, em van anar guiant pel seu camí: una de les assignatures de l'institut que més m'agradava i on sempre buscava anar més enllà, la participació a les proves Cangur i les classes de preparació... i el pas següent va ser trobar-me amb Bojos per les Matemàtiques dins del programa Bojos per la Ciència, havent dubtat si fer Bojos per la Natura, ja que era una àrea que també m'havia captivat sempre.

El programa tenia molt bona pinta, hi veia moltes ganes darrere i em va semblar una oportunitat per aprendre més matemàtiques des de diferents punts de vista i per ajudar-me a prendre la decisió de quin grau universitari estudiaria, a més de conèixer gent amb inquietuds semblants a les meves.

Les expectatives es van complir prou. La major part dels professors i *bojos* érem gent motivada i interessant, que valia la pena conèixer. Vaig descobrir el que eren per mi noves branques de les matemàtiques, vam fer-ne tastets, sense la pressió escolar, pel simple fet de gaudir de les matemàtiques.

Cada sessió va ser diferent, n'hi va haver per a tots els gustos, fet que va comportar que la participació a Bojos per les Matemàtiques fos una experiència molt enriquidora. En primer lloc, hi va haver un dinamisme quant al lloc: vam fer sessions a les tres universitats on s'imparteix el grau en Matemàtiques i vam visitar el Centre de Recerca Matemàtica. En segon lloc, vam poder tastar com són les classes universitàries, però també com divulgar les matemàtiques pot ser molt divertit per a qualsevol. Hi va haver sessions molt dures i difícils de seguir mentre que d'altres eren més «suaus», però sempre ens van fer pensar molt i de maneres diferents i inusuals, cosa que, tot i que és ben interessant, no és comú en el nostre sistema educatiu. També vam poder treballar amb diferents àmbits d'aplicació i molts altres aspectes que em deixo d'enumerar.

El que potser va fallar més va ser que, en constar de tantes sessions, a banda que a vegades es feia una mica pesat (eren molts dissabtes al matí seguits, durant quatre hores ininterrompudes), alguns temes els vam treballar en més d'una o dues sessions perquè era el primer cop que es duia a terme i potser els professors desconeixien concretament el que ja havíem fet.

Pel que fa a la meva decisió sobre si estudiar matemàtiques o no, tot apuntava que ho acabaria fent, però just l'any passat va aparèixer un grau en Bioinformàtica, i, després de donar-hi voltes fins a l'últim moment, vaig decantar-me per estudiar Bioinformàtica, ja que alguns dels meus interessos també hi són presents. Tot i així, tinc molt clar que m'encanten les matemàtiques. Les trobo a faltar. Estic pensant a començar el grau, sigui el curs vinent o més endavant.

De fet, un dia vaig assistir a una classe de matemàtiques de la UB i va ser molt gratificant i emocionant veure com els *bojos* de la UB em van acollir entre ells després de més d'un any sense veure'ls; amb tants mesos de trobar-nos hem acabat forjant un vincle «boig» que perdurarà.

En conclusió, Bojos per les Matemàtiques va ser una bona experiència i, com tot el que un fa a la vida, ha influït on soc ara. I és que la meva essència matemàtica no ha desaparegut ni ho farà; si tens un «cuquet» matemàtic a dins, sempre hi serà, i l'hauràs de seguir alimentant i gaudint, d'alguna de les mil maneres que hi ha, de les matemàtiques.

### Marc Magaña Matemàtiques, UAB



Vaig conèixer el programa Bojos per les Matemàtiques quan cursava primer de batxillerat a través d'un amic i company d'institut que havia participat a Estalmat. Des de petit m'han agradat les matemàtiques i sentia curiositat per saber d'on provenien les fórmules que dia a dia feiem servir a les aules, i també per conèixer aplicacions de les matemàtiques més enllà de les típiques que havíem vist als exercicis acadèmics. Aquest programa es presentava, doncs, com una oportunitat per aconseguir els meus objectius.

Participar en el programa no semblava fàcil; la primera prova de selecció ens ho va deixar ben clar. Consistia en un petit examen, el qual vam fer a la FME de la UPC, amb poques preguntes però que vaig trobar ben complicades. Era al matí i els nervis no em van deixar dormir en tota la nit. Desitjava participar-hi i no volia que un mal dia m'ho espatllés. Vaig tenir una mica de sort i vaig resultar escollit per passar a una segona fase de selecció. Aquest cop es tractava d'una entrevista grupal on ens vam trobar per primer cop molts dels que després seríem membres del programa. Un cop rebut el correu on ens comunicaven que definitivament havíem entrat, els nervis van desaparèixer per complet i l'alegria va envair-me.

Durant aproximadament un any, gairebé cada dissabte al matí, de 10 a 14 hores, assistíem a sessions de temes diversos, tots relacionats amb les matemàtiques. Vam parlar del clima i els sistemes dinàmics, vam recórrer segles d'història de les matemàtiques repassant

anècdotes, vam tocar matemàtiques, vam fer una cursa d'icosàedres, etcètera. Les sessions em van resultar amenes, molt ben preparades i força participatives.

A més de descobrir setmana rere setmana un munt de matemàtiques, també vam passar per les diferents universitats catalanes on s'imparteix el grau en Matemàtiques (a la FME de la UPC, a la UB i a la UAB), també vam fer una sessió al CRM. Cada trimestre, més o menys, canviàvem d'universitat. Per sort teníem la Iolanda Guevara, coordinadora del programa, que ens guiava i ens venia a trobar si ens perdiem, a més d'ajudar-nos sempre que ho necessitàvem (fins i tot ens va buscar contactes per als treballs de recerca de segon de batxillerat!).

Guardo un record molt especial de la cerimònia de clausura de la primera edició del programa, on ens van parlar de màgia matemàtica o matemàgia, un tema que va resultar-me apassionant. Però deixant de costat la sessió, el que va fer que aquell acte fos realment especial va ser gaudir d'una sessió més amb els companys del programa, els *bojos*. El fet de compartir un interès poc comú, l'interès per les matemàtiques, ens va unir molt, i a dia d'avui encara mantenim el contacte.

Actualment estudio matemàtiques a la UAB, on m'he retrobat amb alguns companys del programa. Estudiar matemàtiques és una decisió que havia pres abans de viure aquesta experiència, però cal dir que el Bojos per les Matemàtiques va oferir-me nous estímuls per cursar el grau, i em va permetre conèixer un gran ventall d'aspectes de les matemàtiques que no hauria vist sense aquest programa.

### David Rial, Matemàtiques-Enginyeria Informàtica, UB



Des que vaig començar l'educació secundària, les matemàtiques m'havien cridat l'atenció, tot i la meva ignorància respecte a què representaria estudiar-les. Per aquest motiu em vaig interessar quan la meva professora del curs anterior em va comentar que la Fundació Catalunya-La Pedrera volia fer un curs sobre matemàtiques i que buscava estudiants de la meva edat que



tinguessin curiositat pel tema. Ho veia com una manera d'aprendre i alhora fer-me una idea més clara sobre què representaria estudiar matemàtiques. En comentar-li al meu professor i a la direcció del centre, tots em van donar el seu suport i després de superar un examen vaig tenir la gran sort de poder entrar en aquest projecte.

Al començament es va fer dur, ho reconec. Cada dissabte m'havia de llevar relativament d'hora per fer una hora i mitja de camí per anar a fer el que pensava que serien classes. Ara bé, després de les dues primeres sessions, em va quedar clar que no eren classes, sinó que eren matins de dissabtes que passava juntament amb amics que compartien la mateixa curiositat que jo i que plegats apreníem curiositats sobre les matemàtiques. Cada dissabte apreníem sobre una branca diferent, noves aplicacions que no treballàvem als instituts i que ens creaven moltes preguntes diferents.

Després d'haver acabat el curs i d'haver començat a estudiar matemàtiques, haig de confessar que em va ajudar molt a fer-me una idea més clara sobre què seria estudiar matemàtiques. L'oportunitat de poder fer unes quantes sessions a cada una de les tres universitats públiques de l'àrea de Barcelona on actualment es poden cursar matemàtiques ens va permetre conèixer més a fons la manera de treballar de cada una. A més, personalment em va influir molt a l'hora d'escollir la universitat on estudiar. També m'agradaria ressaltar les amistats que hi vaig fer. Amb algunes d'elles coincideixo a la universitat i això em va facilitar l'entrada a la carrera pel fet de conèixer algú tot just entrar-hi.

Igualment, em va agradar força el sistema de treball de les sessions, ja que primer ens donaven una part més teòrica que després podíem posar en pràctica en tallers i això ens ajudava a entendre-ho millor.

Així doncs, animaria tothom qui tingui l'oportunitat de participar-hi a provar-ho, ja que és una experiència molt enriquidora i que en cap cas m'ha decebut. Gràcies a aquest projecte, ara sempre que algú em pregunta sobre Bojos per les Matemàtiques i el que em vaig endur tinc la resposta clara: una molt bona experiència, moltes amistats, grans records i una decisió personal, les ganes d'estudiar matemàtiques.

## Sergio Serrano Matemàtiques-Física UAB



Em dic Sergio i aquest curs he començat la meua carrera universitària a la Universitat Autònoma de Barcelona, on estudio la doble titulació en matemàtiques i física. Fa un parell d'anys, vaig tenir la gran sort de

poder participar en la primera edició del programa Bojos per les Matemàtiques. Des de ben petit m'han apassionat les matemàtiques, i ja havia participat en altres activitats extraescolars relacionades amb aquestes:

Anem x + Matemàtiques, proves Cangur, Olitele... És per això que el primer cop que el meu professor de matemàtiques del batxillerat em va parlar del programa ja estava decidit a participar-hi: sessions de temes matemàtics que mai havia tractat? Apassionant!

Vaig tenir sort, vaig ser acceptat, i amb això començà un gran any de diversió matemàtica. El programa va ser una increïble experiència didàctica i lúdica: classes interessantíssimes, un gran professorat, companys amb qui compartir experiències i interrogants (matemàtics, és clar)...

Totes les sessions tractaven branques diferents i igualment fascinants: sistemes caòtics, corbes reglades, fractals, canvis de base, topologia... Fins i tot bombolles de sabó! (perquè a vegades les matemàtiques més simples són les més sorprenents). Però les sessions no eren només això, sessions interessants, eren molt més: en acabar cada classe, un sentia que la seva manera de pensar havia canviat una mica, que dintre de la seva ment s'havia obert una nova finestra de les infinites diferents des de les quals es poden observar les matemàtiques. I això serveix, i molt. Serveix per veure tant el món matemàtic com el dia a dia (que, al cap i a la fi, no deixen de ser dues cares de la mateixa moneda) des de punts de vista nous i emocionants que d'una altra manera hauria trigat molt de temps a descobrir. Així mateix, ajuda també a generar inquietuds i preguntes de tota mena, que són l'ànima de la recerca i el pensament científic.

A més de tot l'esperit científic inculcat, les sessions també són molt útils per ajudar a veure si les matemàtiques són una carrera que fa per tu. Encara que la base és la mateixa, i el salt de nivell no és excessiu, les classes de matemàtiques de l'escola són força diferents de les impartides a la universitat. Algunes de les sessions dels Bojos et mostraven un primer tastet de com seran aquestes últimes, tant amb el temari com amb la manera d'impartir del professor. Cada professor explicava d'una manera diferent (n'hi havia tant de les diverses universitats com d'educació secundària i batxillerat), i l'estil d'aquells que treballen en alguna universitat reflectia la manera d'explicar en aquests centres, la qual cosa et donava una primera impressió de com és una classe d'un grau en Matemàtiques.

En el meu cas concret, si bé aleshores ja tenia clar quins estudis volia cursar, el programa va servir per reafirmar-me en la meua decisió, ja que vaig gaudir de totes les sessions, tant del temari com de les diferents maneres d'explicar-lo emprades per cada professor.

A més del professorat i el temari, els companys van tenir un paper clau a fer d'aquesta una gran experiència. Molts de nosaltres havíem tingut poques oportunitats de compartir la nostra passió per la matèria amb amics i coneguts. Arribar a classe i poder

posar-se a comentar les inquietuds i els dubtes matemàtics d'un (uns quants d'ells generats per les sessions de setmanes anteriors) és una de les millors maneres de potenciar el pensament matemàtic.

A més de les matemàtiques, compartíem moltes altres aficions, la qual cosa va afavorir que es formés un molt bon grup des del principi. A banda de ser útil per fer noves amistats, això ens va servir força a l'hora de treballar les sessions, ja que aquestes requerien constantment comentar idees i arribar a conclusions en grup, i tots ens sentíem molt còmodes es treballés amb qui es treballés.

El Bojos per les Matemàtiques va ser una molt bona experiència tant en l'aspecte educatiu com social i personal. D'una banda, em va permetre relacionar-me amb gent apassionada per les matemàtiques, amb la qual encara mantinc contacte (alguns com a companys de carrera, com era previsible). D'altra banda, em va obrir els ulls i la ment a àrees desconegudes de la matemàtica, i em va ensenyar a pensar i observar les matemàtiques d'una manera diferent de la que havia vist fins aleshores. En definitiva, va ser una gran etapa que em va ajudar a formar-me a diferents nivells, i que sens dubte recomano a tot aquell a qui s'ho passi bé amb les matemàtiques.

## Cultura i matemàtiques

### Matemàtiques a l'art i art a les matemàtiques II: matemàtiques en el color

Maria Alberich

Universitat Politècnica de Catalunya

L'art i les matemàtiques comparteixen una gran quantitat de punts de trobada. En aquest segon article aprofundirem en el diàleg entre les matemàtiques i l'art a partir de la temàtica comuna del color.

Proposo iniciar la nostra observació del color en el marc del diàleg entre les matemàtiques i l'art amb l'obra *Nombres primers, segons, tercers...* d'Icardi exposada al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) en l'exposició temporal «Quan l'art i les matemà-

tiques es toquen». Amb el nom *Icardi* signen el treball conjunt una parella d'artistes, Imma i Josep Vall, germans, pintora i matemàtic, respectivament.



Aquesta obra explora la factorització dels nombres naturals a través dels colors de l'arc de sant Martí. Recrear aquesta obra amb una paleta de colors personal és una proposta que podem portar fàcilment a l'aula. En podem gaudir molt, tant pel vessant plàstic com pel matemàtic, i és una experiència recomanable, de manera especial per a l'alumnat de primària que ja domina la factorització d'un nombre en els seus factors primers. La proposta d'Icardi en aquesta obra és la següent: quan factoritzem un nombre, comptem el nombre de factors primers que el componen. Si es tracta d'un nombre primer obtenim un sol factor. Si obtenim dos factors (com el 4 o el 6) en diem nombre «segon», si n'obtenim tres (com el 8 o el 12), «tercer», etcètera. Ara prenem la seqüència de nombres naturals 2, 3, 4... i pintem una franja de la mateixa amplària per cada nombre. Triem un color per als nombres primers (per exemple, el violeta en l'obra d'Icardi) i pintem les seves franges corresponents d'aquest mateix color. Després triem un color per als nombres segons (per exemple, l'anyil en l'obra d'Icardi), i així successivament. La paleta de colors del quadre d'Icardi anterior està composta pels colors de l'arc de sant Martí i s'ha triat la seqüència que comença amb els colors freds: violeta, anyil, blau, verd, groc, taronja, vermell. Icardi ha recreat la mateixa idea en una altra obra on s'ha triat la mateixa paleta de colors començant la seqüència pels tons càlids. Podem contemplar-ne l'efecte a continuació.



Aquesta experiència plàstica ens evoca tot un seguit de reflexions matemàtiques que hi estan relacionades. Per exemple, podem preguntar-nos si hi ha infinits nombres primers, segons, tercers..., i quantificar com estan distribuïts. Aquesta pregunta dona peu a recordar que Euclides, en el llibre dels *Elements* (300 aC), ja va demostrar que cap llista finita de primers  $\{2, 3, 5, \dots, p\}$  no pot contenir-los tots. Per trobar-ne un de nou, només cal considerar el producte de tots els primers que coneixem i

sumar-li una unitat

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$$

que, o bé serà un nombre primer, o bé tindrà un factor primer diferent dels de la llista. Per exemple,  $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$  permet trobar el nou nombre primer 31. Això ens permet saber que hi ha infinits primers i, per tant, també infinits segons, tercers... Icardi, en la presentació de la seva obra, observa que a partir d'un cert nombre hi ha més segons que primers, a partir d'un altre més tercers que segons i així successivament. De fet, podem plantejar-nos quantificar els nombres primers, intentant esbrinar el nombre de primers que hi ha més petits de qualsevol nombre  $x$  donat. Definim la funció

$$\pi(x) = \{\text{nombre de primers} \leq x\},$$

que és esglaonada, i salta en una unitat cada vegada que apareix un primer nou. Malgrat que és impossible predir el valor exacte de  $\pi(x)$  el seu creixement és força regular, i aquesta regularitat es fa més evident a mesura que el valor de  $x$  és més i més gran. Si es construeix una taula de valors prenent com a  $x$  potències successives de 10, es pot veure que la raó de  $x$  entre  $\pi(x)$  està molt a prop de la funció logaritme en base  $e$ ,  $\ln x$ . Aquesta relació, coneguda com el «teorema dels nombres primers», va ser estudiada i conjecturada pel matemàtic Gauss l'any 1792, i no va ser demostrada fins al 1896 independentment per Hadamard i de la Vallée Poussin. De fet, un dels problemes matemàtics oberts més importants de l'actualitat, la hipòtesi de Riemann, consisteix a conjecturar que una funció, la qual és un refinament de la funció  $\frac{x}{\ln x}$  que hem considerat més amunt, és una bona aproximació de  $\pi(x)$ . En conclusió, acabem d'experimentar com una obra d'art pot conduir-nos a profundes reflexions matemàtiques. Si us interessa saber-ne més detalls, recomano la lectura de *Números en Números* de Capi Corrales, la qual pot ser adequada també per a l'alumnat de batxillerat.

Reprenem tot seguit la temàtica del títol d'aquest article, les «matemàtiques en el color». En pensar-hi, segurament ens ve una pregunta al cap: s'hi amaguen realment matemàtiques, en el color? Josef Albers, artista alemany, professor de la Bauhaus, teòric i pedagog del

color va afirmar: «El color és el més relatiu dels mitjans que l'artista utilitza». D'altra banda, l'artista Vincent van Gogh va expressar en una carta al seu germà Theo que sentia «la necessitat de conèixer les lleis del color». Aquesta aparent contradicció mostra les dues cares d'una mateixa moneda: el color permet expressar la subjectivitat de l'artista i a la vegada segueix unes lleis i una lògica. Entendrem aquestes lleis lògiques que governen la teoria del color com les «matemàtiques del color».

És comú interpretar la paraula *relatiu* de la frase d'Albers com a «relatiu a l'artista o a l'observador», és a dir, com a «subjectiu». Possiblement Albers també volia expressar una «lleï» del color menys coneguda: la percepció d'un color canvia depenent dels colors que l'envolten. Aprofundirem sobre aquest fet més endavant. Ara mateix, il·lustrem-ho amb l'obra *Arc de sant Martí* del mateix Albers (font de la imatge: la historia del arte.com), realitzada amb *collages* de vidre translúcid i que aconsegueix crear una interessant sensació d'inestabilitat. És diferent de la sensació que hem experimentat amb els arcs de sant Martí d'Icardi de la pàgina anterior?



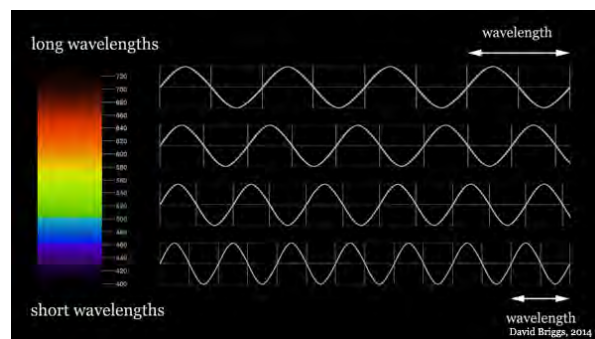
Explicaré a continuació alguns trets bàsics de les «matemàtiques del color» des d'una certa perspectiva històrica i amb esperit matemàtic, qüestionant el que recordem haver après a l'escola, i compartiré algunes curiositats que em semblen prou interessants.

El color és una percepció del sentit de la vista. Plató al segle IV aC la va descriure així:

«El color... és una flama que flueix dels diversos cossos, la qual com que té partícules proporcionades a la vista, produeix la percepció». Plató, *Timeu* 67d (traducció de Josep Vives a la Fundació Bernat Metge).

Malgrat que l'explicació de Plató no té cap fonament científic, podem dir que no es va equivocar gens en el fet de determinar els tres actors indispensables per a l'existència del color: la llum (la flama), l'objecte (els cossos) i l'observador (que percep el color). De fet, actualment el color es defineix com una percepció visual de la llum reflectida pels objectes.

És comú llegir l'afirmació «la llum és color». Tanmateix, això no és cert: el color és una sensació de la nostra ment en resposta a la llum. La llum blanca està formada per fotons que es comporten com ones electromagnètiques. Quan la llum blanca passa a través d'un prisma de vidre o a través de gotes d'aigua en suspensió a l'atmosfera es refracta i se separa en raigs amb longitud d'ona diferent. El sistema humà de percepció visual identifica una part d'aquestes diverses ones amb colors diferents, els colors de l'espectre visible, que podem contemplar a l'arc de sant Martí.



Els colors de l'espectre visible comprenen una gamma contínua de colors, que van des dels raigs d'ona més curta que percebem com a violeta, fins als raigs d'ona més llarga que percebem com a vermell.

Més enllà d'aquest interval, en els dos extrems hi ha els raigs d'ones ultraviolades i infraroges, respectivament, i altres ones, que no són visibles per a l'ull humà. La llum visible és simplement una petita part de l'espectre electromagnètic complet que s'estén des dels raigs còsmics d'alta energia (de longitud d'ona molt curtes), seguits pels raigs gamma, raigs X, ultraviolat, visible, infraroig, microones i ones

de ràdio, fins a les ones d'energies més baixes (de longitud d'ona molt llarga).

No tots els animals perceben el mateix espectre visible que l'ésser humà, i alguns animals perceben colors que nosaltres no podem ni imaginar-nos. Les abelles, per exemple, tenen el seu rang d'espectre visible desplaçat cap a l'ultraviolat respecte al de l'ésser humà. No poden veure les longituds d'ona que nosaltres percebem com a vermelles i en canvi poden percebre radiacions ultraviolades, invisibles per a nosaltres. De fet, moltes flors que són pol·linitzades per les abelles tenen pigments que reflecteixen les radiacions ultraviolades i que elles poden percebre.

Tampoc tots els éssers humans no reaccionem amb la mateixa sensació de color com a resposta a les mateixes longituds d'ona, ja que la sensació de color és el producte de la nostra ment i està fortament influenciada pel nostre psiquisme i la nostra cultura. Per exemple, fixem la nostra atenció en els tons de color que distingim a l'arc de sant Martí. D'acord amb la nostra cultura occidental actual, acceptem amb naturalitat descriure l'arc de sant Martí amb set colors: violeta, anyil, blau, verd, groc, taronja i vermell. Però, si l'espectre visible conté un rang continu de longituds d'ona, per què un nombre finit d'ells ha de ser més especial? Per què exactament set? Ha estat així al llarg de tota la història? Quins colors hi han vist els nostres avantpassats, en l'arc de sant Martí?

En un dels primers tractats històrics sobre òptica, el químic anglès del segle XVIII Joseph Priestly va escriure sobre l'arc de sant Martí que «l'ordre regular dels colors era una circumstància que no podia haver passat desapercibuda a cap persona (de qualsevol època)». Malgrat que ens pugui semblar un argument raonable, el cert és que hi ha abundants evidències literàries i pictòriques les quals suggereixen que ni el nombre ni l'ordre dels colors no han estat clars per als diferents observadors al llarg de la història ni en les diferents civilitzacions.

Segons John Gage (*Colour and Culture*, Thames & Hudson, 2012), un observador jove de finals del segle XIX (basat en un estudi de l'època) podia reconèixer només quatre colors (vermell, groc, verd i blau) en un arc de sant Martí ben definit. Precisament aquests quatre

colors són els més comuns en representacions medievals de l'arc de sant Martí, juntament amb arcs de dos colors, verds i vermells. Cal fer notar que després els estudiosos o comentaristes atribueixen als colors emprats en cada obra un significat místic, especialment en les imatges religioses. Observem, per exemple, la imatge següent (font de la imatge: Gage, *Colour and Culture*) sobre l'aliança de Déu amb Noè, del manuscrit il·luminat del segle VI, *Gènesi de Viena*, el més antic i millor conservat còdex bíblic il·lustrat que ha arribat als nostres dies.



Segons els experts, aquesta representació de l'arc de sant Martí usa un esquema bicolor: al verd de l'aigua se li atribueix el significat del diluvi i a la banda vermella de sota, el foc del dia del judici. En canvi, jo hi observo diverses divisions en les bandes verdes i vermelles, i hi distingeixo, clarament al mig, una banda blanca que separa les bandes de tons verds i vermells. Personalment, se'm fa evident una similitud reveladora entre aquesta imatge i la imatge que la segueix, malgrat que no he trobat constatada aquesta analogia en la bibliografia que he consultat.

Altres artistes van representar un arc de sant Martí amb tres colors, fidels a la descripció d'Aristòtil, que de seguida es va interpretar com un símbol de la Trinitat. Aristòtil va descriure l'arc de sant Martí amb la seqüència observada correctament de colors vermell (*phoinicoûn*), verd (*prásinon*) i porpra o violeta (*halourgón*). En canvi, Virgili, a l'*Eneida*, comenta la impossibilitat de comptar els colors de l'arc de sant Martí, justificant que n'hi ha un miler. El *Vergilius Romanus* és el còdex més antic (segle V) que recull obres de Virgili i es conserva a la Biblioteca Vaticana. A

la imatge següent (font: Biblioteca Vaticana) veiem com l'artista d'aquest còdex ha resolt la representació d'aquests milers de colors condensant-los en tres (vermell, blanc i verd). Tanmateix, cada banda està dividida en unitats més menudes, segurament per expressar aquesta multitud de colors. Llevat que l'ordre està a l'inrevés, no ens recorda sorprenentment aquest arc de sant Martí el que acabem d'observar a la imatge anterior?



La figura següent representa també la història de Noè, extreta d'un *Llibre de les hores* de Normandia de l'any 1430. L'artista podria haver-se assabentat de la investigació sobre la refracció de la llum a través d'un prisma coneguda al segle XIV, perquè representa un arc de sant Martí amb la seqüència dels colors de l'espectre. És interessant que ens fixem en el color del cel d'aquesta miniatura i el comparem amb les miniatures anteriors, ja que és un tema del qual parlarem més endavant (font de la imatge: Gage, *Colour and Culture*).

El llenguatge és una bona manera de valorar la influència cultural en l'experiència visual. Des d'aquest punt de vista es constata que el mateix concepte de color, com a categoria cognitiva, s'ha configurat en algunes cultures i en altres no. Un estudi antropològic de l'any 1971 sobre l'ús cultural del color a les illes de Polinèsia va concloure que l'apreciació dels diferents colors no era un tema d'interès en aquella cultura, ja que no hi havia ni paraules per referir-s'hi. Aquest estudi presentava el testimoni d'un illenc nadiu de Bellona (Polinèsia)

que deia: «Nosaltres no parlem gaire sobre color aquí».



Un fenomen semblant a la cultura polinèsia també el trobem a casa nostra. John Gage fa notar que a la cultura mediterrània grecollatina antiga les diferències en el grau de lluminositat haurien estat molt més importants que les diferències entre tons de colors. Aquí també l'estudi de les llengües i la literatura aporten informació rellevant, com la importància de la distinció entre brillant i mat en l'antiguitat per sobre de les distincions de tons de colors. Per exemple, en llatí i les llengües germàniques distingien entre blanc brillant (*albus* i *blanck*, respectivament) i blanc mat (*candidus* i *weiss*, respectivament), distinció que s'ha perdut en els idiomes actuals. En canvi, els historiadors del color sostenen que les llengües grega i llatina tenen pocs termes cromàtics o estrictament cromàtics.

Seguint aquesta mateixa línia d'idees, és interessant la reflexió sobre el color blau que fa l'historiador Michael Pastoureau (*Azul: historia de un color*) i que us resumiré tot seguit. Tot i que l'ús del color blau s'havia estès en la cultura grecollatina, no existia en aquestes llengües antigues un terme per anomenar conjuntament la gamma cromàtica del color blau. A l'antiguitat el color blau va ser un color poc apreciat, excepte per a la cultura egípcia. El

blau no es troba ni a les coves paleolítiques ni quan apareixen les primeres tècniques de tint neolítiques. El color blau és difícil de fabricar i de dominar, i segons Pastoureau aquest és el motiu pel qual no va tenir cap paper en la vida social, religiosa o simbòlica de l'època grecoromana. A Roma el blau era el color dels bàrbars (el color dels seus ulls), dels estrangers. En la llengua grega hi ha confusió de vocabulari entre el blau, el gris i el verd. L'absència del blau en els textos antics va intrigar tant alguns filòlegs del segle XIX que van arribar a creure que el sistema visual dels grecs era incapaç de percebre'l. El llatí tampoc no té termes precisos per al to blau, encara que s'hi troben paraules com *caeruleus* i *glaucus* que evolucionaran i designaran diversos tons de blau. Observem que les llengües romàniques han adoptat la paraula que defineix el to blau de les llengües germàniques (*blau*) o de l'àrab (*azraq*, del qual deriva el mot castellà *azul*).

Segons Pastoureau, el desprestigi del color blau va perdurar a la cultura europea fins a l'alta edat mitjana. El canvi va ser motivat per un canvi profund de les idees religioses: el Déu cristià es converteix en un déu de llum i la llum s'identifica amb el color blau. Per primera vegada a Occident es pinten cels blaus, quan anteriorment eren negres, vermells, blancs o daurats. Això es va reforçar per l'expansió del culte marià: la creença que la Verge Maria habita al cel, associa el color blau amb la verge. A partir del segle XII la verge apareix en les imatges coberta amb un mantell i vestit blau. Com a mostra d'aquesta associació del blau amb la verge que ha perdurat fins als nostres dies recordem l'estrofa del virolai: «...deu-nos abric dins vostre mantell blau». Així la verge es convertí en la principal promotora del color blau.

A continuació podem observar l'escena de l'epifania de les pintures murals de Ferrer Bassa a la capella de Sant Miquel del monestir de Pedralbes, que daten del segle XIV en la plenitud de l'art gòtic (font de la imatge: MUHBA).

Efectivament, la túnica de la verge és del mateix to blau del cel. D'altra banda, el pintor utilitza recursos cromàtics per suggerir una idea de perspectiva en la composició. Les figures del primer pla porten vestits de colors saturats (colors més purs, sense barrejar amb

blanc) en contrast amb els tres personatges que s'aproximen a cavall. De la mateixa manera la lluminositat o brillantor predomina en les figures del primer pla, com podem observar en la major claredat de la pell en rostres i mans de la verge, l'infant i els tres reis.



Hi ha una relació curiosa entre la verge i l'arc de sant Martí. Primerament sant Bonaventura (*Laus Beatae Virginis*) al segle XIII, i més tard santa Brígida de Suècia (*Revelacions*) al segle XIV associaren l'arc de sant Martí amb la verge. El pintor Matthias Grünewald es fa ressò d'aquesta associació i l'expressa en la seva obra *Stuppach Madonna* (1517-1519), que podem veure tot seguit (font de la imatge: Gage, *Colour and Culture*).

Observem la similitud en els colors del vestit de la verge de Grünewald i la de Ferrer Bassa, vestit vermell i túnica blava. Al quadre de Grünewald es veu l'arc de sant Martí, envoltant els caps de la verge i l'infant Jesús, que a primer cop d'ull ens pot semblar estrany: la zona superior de l'arc de sant Martí és més pàl·lida, simulant la lluminositat del fenomen atmosfèric, i contrasta amb la zona inferior més saturada i ressaltada formada pels dos colors del vestit de la verge, el vermell i el blau. Així, l'alteració de l'ordre dels colors de l'arc de sant Martí i la seva saturació són

els recursos cromàtics que usa el pintor per emfatitzar l'associació de l'arc amb la verge.



Reprenem ara la pregunta de per què distingim exactament set colors en l'arc de sant Martí. La resposta la trobem en la influència de l'obra de Newton, que no només va determinar set colors en l'espectre, sinó que també va presentar-los per primera vegada en forma de roda i no sobre un segment. Quan es refracta la llum blanca a través d'un prisma es distingeixen colors formant bandes contigües. És natural representar aquests colors en forma de segment.



No ens sembla estranya la representació dels colors en forma de cercle? Què tenen en comú els colors de longitud d'ona més curta amb els

de longitud d'ona més llarga per posar-los junts en un cercle? Ens hem adonat que hi ha un color a la roda de colors que vam aprendre a l'escola, el magenta, que no apareix a l'espectre?

En la seva obra *Opticks* del 1704, Newton va presentar el seu diagrama circular dels set tons de color de l'espectre, ordenats i amb una proporció determinada. La forma circular resultava adequada per modelitzar la suma de llums de colors: el color resultant de sumar llums de colors diferents correspondria al «centre de masses» de les llums components, ponderades segons els seu «nombre de raigs» relatiu al total.

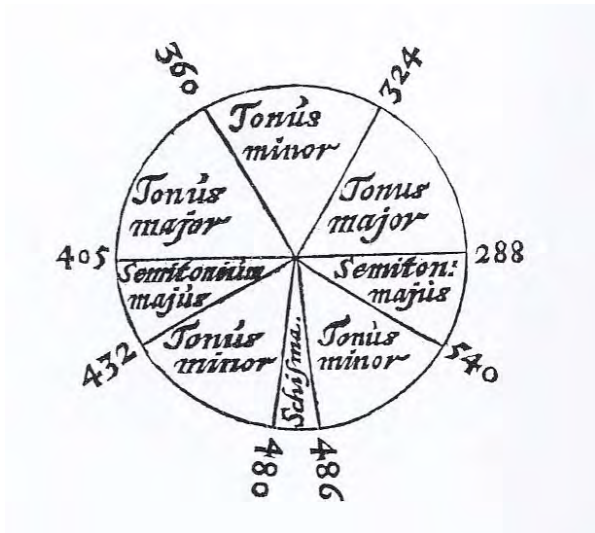
D'aquesta manera, cal interpretar el diagrama de Newton en l'espai bidimensional, és a dir, com un cercle: els colors sobre la circumferència serien colors «intensos i florits fins al grau màxim», és a dir, totalment saturats, mentre que els altres colors perdrien saturació a mesura que s'apropessin al centre de la circumferència. El centre representaria el color blanc. El cercle de Newton és, doncs, la primera representació gràfica bidimensional de la saturació i del to dels colors. La coordenada del to està marcada amb set separacions que porten el nom de set colors de l'espectre (violeta, anyil, blau, verd, groc, taronja, i vermell), els quals encara avui en dia considerem que componen l'arc de sant Martí. És molt curiosa la proporció de cada separació, la qual, tot i que és coherent amb la seva funció de modelar l'addició de colors llum, segueix exactament la seqüència d'interval·ls de l'escala musical. Vegem a continuació una imatge de l'escala musical dòrica, una de les antigues escales modals tradicionals (diferent de les modernes escales tonals que van adoptar-se a partir del segle XVIII), que apareix en l'obra *Compendium Musicae* de René Descartes del 1650, i en la qual es va inspirar Newton per al seu diagrama.

El mateix Newton va justificar la seva divisió «musical» de l'espectre de llum blanca amb aquestes paraules:

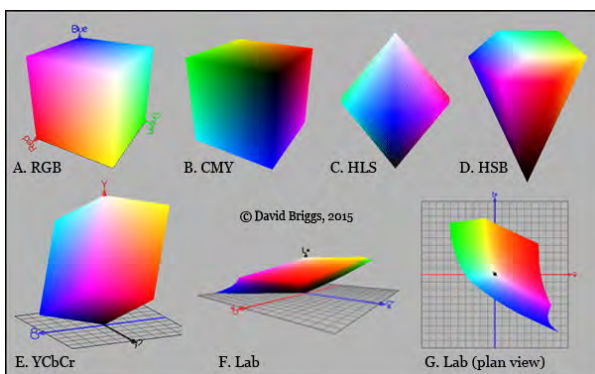
«... no només perquè s'adequa molt bé amb el fenomen, sinó perquè també involucra quelcom de l'harmonia dels colors..., en concordança amb l'harmonia dels sons. Fins i tot semblarà ben trobada l'afinitat entre els colors més perifèrics vermell i violeta, els extrems dels colors, de la mateixa manera



que succeeix amb els extrems de l'octava (que es poden considerar unísons)».

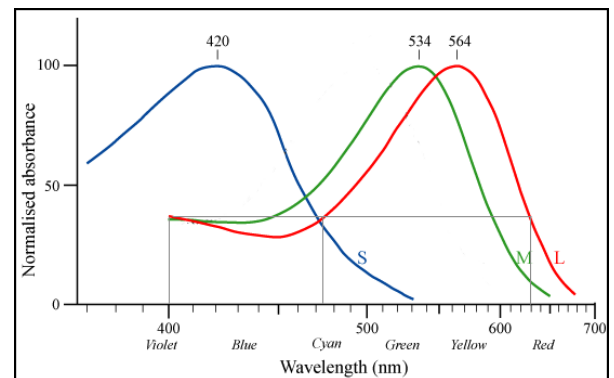


A l'escola s'aprèn que hi ha tres colors primaris per mesclar pintures i també sabem que les pantalles utilitzen tres colors primaris per barrejar llums: el vermell, el verd i el blau. Fins i tot, ens pot semblar familiar la nomenclatura RGB (*red* de vermell, *green* de verd, i *blue* de blau) per referir-se a una parametrització de l'espai de colors en l'espai tridimensional segons la magnitud de les variables R, G i B, les quals poden prendre qualsevol valor entre zero i u. De fet, la gran majoria de les representacions de l'espai de colors són tridimensionals: algunes mesuren en els seus tres eixos de coordenades (que poden ser cartesianes o cilíndriques) les magnituds de to, saturació i brillantor (o lluminositat, claredat o valor, que vindrien a ser termes equivalents), d'altres la proporció de la composició d'un color respecte a tres colors primaris, i algunes darreres s'obtenen per transformacions isomorfe de variacions o combinacions de les anteriors. Però ens hem preguntat mai per què el nombre tres és tan especial?



L'explicació de per què els colors primaris estan agrupats de tres en tres rau en la manera com funciona el sistema de la visió humana, el qual consta de tres processos: l'òptic, el retinal i el cerebral. En el sistema òptic és important el grau d'opacitat del cristal·lí, que segons l'edat de la persona influeix en la percepció dels colors. De fet, el cristal·lí limita el rang de l'espectre visible que som capaços de percebre. Persones a les quals s'ha hagut d'extreure el cristal·lí i no ha estat reemplaçat per una lent plàstica substituïda han demostrat percebre ones de la zona ultraviolada de l'espectre.

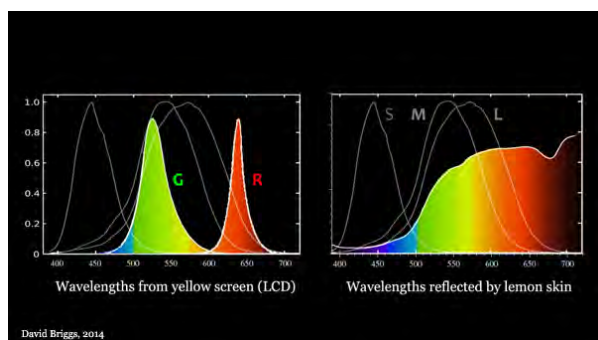
La capa posterior de la retina conté unes cèl·lules fotoreceptores, cons i bastons, que envien la informació al cervell a través del nervi òptic. El fet fisiològic clau que determina la nostra percepció del color és que hi ha tres tipus de cons a la retina humana. Cada tipus té un fotopigment específic amb una corba d'absorció característica que és més sensible a una determinada longitud d'ona: llarga (L), mitjana (M) o curta (S). Per aquest motiu s'acostuma a qualificar l'ull humà de receptor tricromàtic.



En la imatge podem observar que per a cadascun dels tres colors primaris de la mescla de llum (blau, verd i vermell) hi ha un tipus de con que respon més que els altres dos. Anàlogament, cadascun dels tres colors primaris de la mescla de pigment té la propietat d'absorbir un d'aquests colors primaris de la llum. Cal fer notar que els cons no són capaços, per si sols, de detectar una longitud d'ona determinada. Per exemple, l'excitació d'un con L podria respondre a una petita quantitat d'ones de la zona groga de l'espectre, o bé a una gran quantitat d'ones d'una de les tres zones d'igual resposta marcades a la figura: de 630 nm (vermella), de 475 nm (cian) o bé de 400 nm (violeta). D'altra banda, un raig monocromàtic

groc ocasionaria una resposta predominant dels cons tipus L i M per sobre de la resposta dels cons tipus S.

El nostre cervell i certes cèl·lules ganglionars de la retina duen a terme un processament comú de la resposta relativa dels diferents tipus de cons. Aleshores es creen tres senyals: un senyal de brillantor global, i dos senyals que quantifiquen el predomini entre els oposats blau i groc, i entre els oposats vermell i verd. Per exemple, la visualització del color groc es correspondria amb un senyal predominant groc en la característica blau-groc i a un senyal zero en la característica vermell-verd (és a dir, que verd i vermell estan compensats i no predomina cap de tots dos). Aquest processament de la resposta relativa dels nostres cons fa que vegem el mateix color, malgrat que les proporcions d'ones que arriben al nostre ull siguin ben diferents. Vegem un exemple en el gràfic següent extret del portal web *The dimensions of colour* del professor d'art i artista David Briggs, el qual us recomano visitar si voleu aprofundir en el tema del color.



A la figura hi estan representats els espectres de dues combinacions d'ones diferents que nosaltres veiem iguals i de color groc. La combinació de l'esquerra correspon a les ones de llum d'una llimona reproduïda per la pantalla d'un ordinador, mentre que la combinació de la dreta correspon a les ones de llum reflectides per la pell d'una llimona il·luminada pel sol. Per tant, queda clar amb aquest exemple que el color, en aquest cas el groc, no és una característica de la llum, sinó una resposta del nostre cervell.

Així les diferents ponderacions dels senyals de predomini d'oposats són l'origen del cercle

de colors. Les ones monocromàtiques de l'espectre són capaces de produir gairebé totes les combinacions. El color magenta és una combinació dels senyals blau i vermell, provinents per mescles d'ones dels dos extrems de l'espectre.

Hi ha persones que només tenen dos tipus de cons (daltonisme) i, per tant, el seu cervell només pot crear un sol senyal de predomini entre oposats. Per a aquestes persones el seu espectre visual només té dos colors. La percepció visual dels matisos de brillantor fa que aquestes persones es desenvolupin sense dificultats.

Els cons només s'activen quan els nivells d'il·luminació són prou alts, com la llum del dia, i són els que possibiliten la nostra visió policromàtica. En canvi, els bastons són sensibles a nivells d'il·luminació molt baixos i gràcies a ells som capaços de veure-hi amb llum escassa. Contenen un pigment, que és sensible a les ones de la zona de l'espectre del verd-blau. Per aquest motiu la nostra visió és pràcticament monocromàtica quan és fosc, i el color que menys distingim és el vermell. Les longituds d'ona reflectides pels objectes són les mateixes, però nosaltres no percebem els colors. Aquí tenim un altre motiu que respon a la pregunta de per què el color es defineix com una percepció visual de la llum reflectida pels objectes, i no com una longitud d'ona determinada.

Cada tipus de font lluminosa (blanca, de tungstè, de neó, de vapor de sodi, de vapor de mercuri, etcètera) emet ones diferents i, per tant, té un efecte diferent en la il·luminació d'un objecte. Finalitzem aquest article amb una darrera evocació de l'arc de sant Martí, que mostra la varietat de colors que pot emetre una font lluminosa per l'excitació del gas de neó.

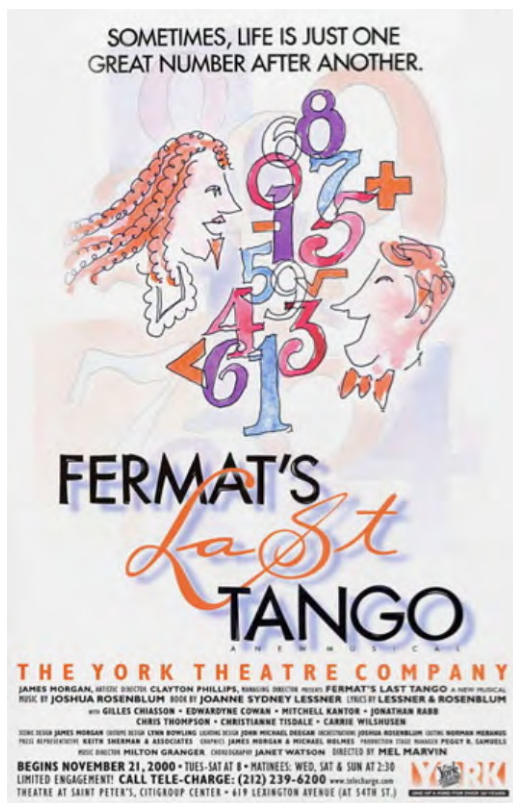


## Fermat's Last Tango

Pep Bujosa

Associació Catalana de GeoGebra

En aquesta secció m'he proposat mostrar alguns exemples sobre la connexió que podem trobar entre les matemàtiques i el teatre. En el número anterior vaig fer evident aquesta connexió en una de les millors tragèdies contemporànies, *Incendis*, que Wajdi Mouawad va escriure l'any 2003. Aquest cop us presento una obra situada al costat diametralment oposat. Es tracta de *Fermat's Last Tango* (2000), un musical molt fresc i divertit sobre la demostració del famós darrer teorema de Fermat (*Fermat's Last Teorema*), aconseguida per Andrew Wiles l'any 1993, en un primer intent, i el 1994 ja definitivament, després de més de tres-cents cinquanta anys d'intents infructuosos dels matemàtics més prestigiosos de la història.



### Antecedents

Recordem que aquest teorema afirma que donada l'equació  $x^n + y^n = z^n$  no té cap solució entera per a  $n$  natural  $> 2$  i per a  $x, y$  i  $z$  diferents de zero. Pierre de Fermat, el 1637, va escriure al marge del llibre *Aritmètica* de Diofant, «he descobert una demostració verita-

blement meravellosa d'aquesta proposició, però aquest marge és massa estret perquè hi càpiga». Andrew Wiles va presentar el 1993 una demostració de la conjectura de Taniyama-Shimura que, en particular, significava la demostració del teorema. Tot i així, s'hi va trobar algun error i un any més tard ja va poder presentar la demostració definitiva.

### El musical

Joshua Rosenblum i Joanne Sydney Lessner van produir el musical l'any 2000. L'argument està basat justament en el moment en què s'ha trobat l'error en la demostració de Wiles (Daniel Keane en la ficció) i com aquest aconseguix resoldre'l. Es va estrenar el 21 de novembre de 2000 al York Theatre Company del carrer 54 de Manhattan (off-Broadway).

Més tard, l'any 2003, es va traduir al portuguès i va iniciar una gira per Portugal fins a arribar al Teatro da Trindade de Lisboa, el 2004.

### L'argument

Comença l'obra i apareix Fermat explicant el relat de la seva demostració.



Tot seguit, en una tumultuosa roda de premsa, Daniel Keane intenta explicar el que significa el teorema que ha demostrat, sense gaire èxit, començant pel teorema de Pitàgores.

A continuació, apareix el fantasma de Fermat que es riu d'en Keane.



No comprèn per què ha invertit set anys per arribar a aquesta demostració tan enrevessada quan la seva és molt més curta i elegant. Kean li demana que li expliqui el seu secret i Fermat s'hi nega. Kean l'acusa de farsant i posa en dubte que hagués trobat la demostració meravellosa.

D'altra banda, Anne, la dona de Keane, està molt contenta de la feina del seu marit, sobretot perquè després de set anys sense veure'l gaire ara tornaran a tenir vida familiar



Apareixen en escena els fantasmes de Pitàgores, Euclides, Newton i Gauss que venen d'Aftermath, una mena d'Olimp dels matemàtics, i que donen suport a Fermat i no tenen gaire en consideració la feina de Kean. En aquest moment, Fermat, amb una cançó tota plena de sarcasme, li fa veure que la seva demostració té un terrible error:

*But your proof contains a flaw, Profesor Keane.*

*It destroys the whole foundation of your finely tuned machine.*

*I hate to be a spoilsport.  
I know it was your Goal.  
But your proof contains a big fat hole.*

A partir d'aquí l'obra explica la feina de Kean per aconseguir resoldre l'error, mentre tothom el pressiona i dubta de la seva capacitat. Fermat, amb la col·laboració dels altres matemàtics, segueixen ridiculitzant-lo fins i tot fent-lo prendre part en un lamentable concurs de televisió. També entra en conflicte amb la seva dona, que ja ha perdut la paciència.

Poc després, des d'Aftermath, els quatre genis comencen a valorar la feina de Kean i, fins i tot, comencen a estudiar per posar-se al dia de la matemàtica del segle XX. Tant és així que Pitàgores comunica a Kean, de part dels quatre, que serà benvingut a l'Aftermath.

Ja us podeu imaginar com acaba tot. Kean aconsegueix resoldre l'error i s'arriba a un final una mica massa ensucrat, en què la parella torna a ser feliç, la premsa publica el seu gran descobriment i en Kean, deixant de banda velles disputes, reconeix que Fermat ha estat un dels més grans matemàtics de tots els temps



### Per acabar

No és, certament, una obra excel·lent. Però només pel fet que una demostració com aquesta hagi inspirat els creadors de l'obra em sembla prou rellevant. Us recomano que la veieu, totalment o parcialment, per valorar millor tot el que us he explicat. La trobareu completa a: <https://www.youtube.com/watch?v=RNqQPcMYcG8>

## Hidden Figures

Ariadna Farrés, NASA-GSFC

Josep Maria Mondelo, Departament de Matemàtiques UAB

El 20 de gener de 2017 va aparèixer a les cartelleres la pel·lícula *Hidden Figures* (en castellà *Figuras ocultas*), basada en un llibre de Margot Lee Shetterly amb el mateix títol. Ens alegra l'aparició d'una nova pel·lícula en què es dona rellevància a les ciències i les enginyeries. A més, en aquesta pel·lícula les matemàtiques tenen un paper destacat.



La pel·lícula ens situa en la carrera espacial entre els Estats Units i la Unió Soviètica durant els anys seixanta. Està basada en fets reals i descriu les vivències de tres dones afroamericanes que treballaven al Langley Research Center de la NASA, situat a Hampton, Virgínia, durant un període de temps que va de la preparació del primer vol suborbital tripulat (Alan Sheppard) a l'execució del primer vol orbital tripulat (John Glenn) dels Estats Units. En aquella època (anys 61–62), Virgínia era un estat segregat, cosa que volia dir que els ciutadans afroamericans no es podien barrejar amb els blancs en espais públics com ara lavabos i autobusos. Per contra, s'havien de recloure en espais reservats per a ells que eren de

pitjor qualitat. La pel·lícula posa èmfasi en com aquests fets també es veien reflectits a les instal·lacions de la NASA i de quina manera les tres protagonistes van anar trencant progressivament les barreres a què es veien sotmeses.

Les tres protagonistes treballaven com a *human computers* a la West Area Computers Division de Langley. Això vol dir que es dedicaven a fer, amb l'ajuda de calculadores electromecàniques, el tipus de càlculs que avui en dia es fan amb ordinador. Aquests càlculs incloïen funcions elementals com cosinus i arrels quadrades, tal com diu a la pel·lícula Katherine Johnson a Jim Johnson la primera vegada que es troben. Això feia la feina de les *human computers* especialment complicada, ja que les calculadores electromecàniques (a la pel·lícula apareix molt la Friden STW 10) només efectuaven les quatre operacions elementals. A l'època ja hi havia ordinadors electrònics, però eren un recurs molt escàs.

Katherine Johnson (Katherine Goble al començament de la pel·lícula, interpretada per Taraji P. Henson) era una matemàtica brillant que va aconseguir una feina a l'Space Task Group, el grup d'enginyers d'elit de la NASA encarregat de solucionar els problemes tècnics i científics plantejats pel vol espacial tripulat. A Katherine la van reclutar pels seus coneixements de geometria analítica i la seva destresa com a *human computer*, però va acabar sent una peça clau en els càlculs orbitals i de reentrada de les missions d'Alan Shepard i John Glenn. La seva feina va destacar fins al punt que va ser admesa com a coautora (no sense enfrontaments) de *technical reports*, cosa que no havia aconseguit abans cap dona i menys afroamericana. George Harrison (interpretat per Kevin Costner), a la pel·lícula director de l'Space Task Group, reconeix progressivament la vàlua de Katherine i la promociona, i canvia les normes del centre quan cal.

Dorothy Vaughan (interpretada per Octavia Spencer) era la supervisora *de facto* de les *human computers* afroamericanes de la West Area Computers Division, a qui neguen reiteradament la condició de supervisora pel seu color de pell. Demostra una gran visió de futur en

aprendre a programar en Fortran i reconvertir les altres *human computers* en programadores. Gràcies a això, va acabar convertint-se en la supervisora dels programadors de l'IBM 7090 del centre.

Mary Jackson (interpretada per Janelle Monáe), que també formava part de les integrants de la West Area Computers, aconseguí feina a l'equip encarregat de desenvolupar i provar la càpsula Mercury. Encoratjada pel cap del seu equip, acaba superant les barreres legals que li impedien cursar una enginyeria, per acabar essent la primera dona afroamericana que es gradua com a enginyera.

Aquestes tres dones van demostrar, igual que moltes altres dones de l'època, un gran esperit de superació envers les circumstàncies adverses, i van saber posar el seu talent per davant de tot per poder treballar en allò que les apassionava. Aquesta pel·lícula ens fa reflexionar sobre el paper de la dona en la ciència i l'enginyeria del passat més recent.

Com tota pel·lícula de Hollywood basada en fets reals, aquesta pel·lícula es pren diverses llicències respecte del que realment va passar, amb l'objectiu de simplificar la història (particularment la part tècnica) i fer-la més entretinguda. En destaquem algunes, no com a crítica sinó com a curiositats i per animar-vos a esbrinar més com era l'època, els vols espacials i aquestes tres dones:

- El personatge George Harrison no és real, i fa tasques que en realitat van desenvolupar diverses persones. Per exemple, en realitat el director de l'Space Task Group (Robert Gilruth) i el director de vol de les missions Mercury (Chirs Kraft) van ser persones diferents. A [4] es pot trobar una crònica de l'època Mercury-Gemini-Apollo des del punt de vista dels directors de vol. El personatge Paul Stafford (interpretat per Jim Parsons) tampoc és real.
- La superació de les barreres racials per part de les protagonistes al llarg de les seves carreres no va tenir lloc durant els anys 61–62, sinó durant un període de temps molt més llarg, que s'estén enrere en el temps fins a l'època de les proves de vol (*flight testing*) per trencar la barrera del so [6].
- És poc probable que els tècnics d'IBM fossin tan ineficients com se'ls presenta a la

pel·lícula. Un ordinador IBM 7090 costava a la venda 2,9 milions de dòlars de l'any 1960, o 63.500 dòlars mensuals si es llogava.

- De fet, d'ordinadors IBM 7090 no en tenien només un a Langley. Al NASA Goddard Space Flight Center hi havia dos IBM 7090 redundants (per seguretat) que processaven la telemetria procedent de la càpsula per actualitzar els indicadors dels controladors de vol a Mercury Mission Control [5]. Un dels càlculs que feien en temps real era predir on cauria la càpsula en cas de fer la maniobra de reentrada en un moment determinat. A la pel·lícula, en canvi, sembla que tots els càlculs es fessin prèviament a terra i que durant la missió no es calculés res.

Malgrat aquestes llicències a l'estil de Hollywood, tots els fets puntuals o són certs o tenen un punt de veritat. Katherine Johnson realment va ser la primera dona i la primera afroamericana coautora d'un *technical report* [7]. També és veritat que John Glenn va demanar que ella revisés els càlculs duts a terme per un 7090, però no just abans del llançament. El fragment tècnic que ens ha fet més mal de tota la pel·lícula és una descripció que fa Paul Stafford dels problemes relacionats amb la trajectòria de reentrada de John Glenn, on s'afirmen que «s'ha de canviar d'una òrbita el·líptica a una parabòlica» (la nova òrbita també és el·líptica si menyspreem el fregament atmosfèric) i «les matemàtiques per a això no existeixen» (el mètode de les *patched conics* era ben conegut). No obstant això, Katherine afirma més endavant que «el problema es pot abordar numèricament» i que el mètode d'Euler «és antic però funciona». Certament, els models atmosfèrics s'havien d'integrar numèricament i els IBM 7090 de Goddard que hem esmentat abans ho feien. No sabem si empraven el mètode d'Euler, però no és inventat, tenint en compte les limitacions computacionals de l'època i que s'havia de fer en temps real. Fins i tot una frase tan pel·liculera com «Katherine ha aconseguit alguns decimals més que aquell *junk of metal*», dita per George Harrison cap al final, es pot salvar: certament les calculadores mecàniques Friden STW 10 treballaven amb més precisió (deu dígits decimals) que els formats de punt flotant de l'IBM 7090 (vint-i-set dígits binaris, perquè la precisió doble no es va introduir fins a l'IBM 7094).

Finalment, voldríem remarcar l'interès de la pel·lícula com a testimoni de les eines de computació de l'època. A part de les diverses aparicions de les calculadores Friden STW 10, una de les escenes que més ens ha agradat n'és una en què Dorothy Vaughan aconseguí fer funcionar l'IBM 7090 per primera vegada. Us animem a convertir-vos en protagonistes d'aquesta escena. Fent servir algun emulador de perforadors de targetes (per exemple [2], trieu Fortran com a *card type*), podeu perforar (o comenceu a perforar) les targetes necessàries (una per cada línia) per escriure el programa en Fortran IV que apareix a continuació (vigileu els espais en blanc: n'hi ha sis al començament de cada línia que comença amb espais, llevat de la línia amb un &, que comença amb cinc espais). Tot seguit, us podeu imaginar carregant la pila de targetes a la lectora i prement els botons necessaris per acabar veient sortir per la impressora en paper continu la llista de tots els primers entre 1 i 10.000.

```

PROGRAM ERATOSTENES
DIMENSION IV(10000)
N=10000
N12=INT(SQRT(FLOAT(N)))
IV(1)=0
DO 10 I=2,N
  IV(I)=1
10  CONTINUE
  I=2
15  IF (I.GT.N12) GOTO 20
  DO 30 J=2,N/I
    IV(I*J)=0
30  CONTINUE
40  I=I+1
    IF (IV(I).EQ.0.AND.I.LE.N12)
&   GOTO 40
    GOTO 15
20  DO 50 I=1,N
    IF (IV(I).NEQ.0) WRITE (*,*) I
50  CONTINUE
STOP
END

```

Per descomptat, aquest programa també es pot executar en un ordinador actual (nosaltres l'hem compilat amb Gfortran 4.9.2 sense cap opció especial). Per als més interessats, al web [3] es poden trobar emuladors tant del

maquinari com del programari (compilador de Fortran inclòs) de l'IBM 7090 i altres ordinadors de l'època.

Per acabar, esperem que els que ja heu vist la pel·lícula us hagi agradat tant com a nosaltres, i animem la resta a veure-la.



## Referències

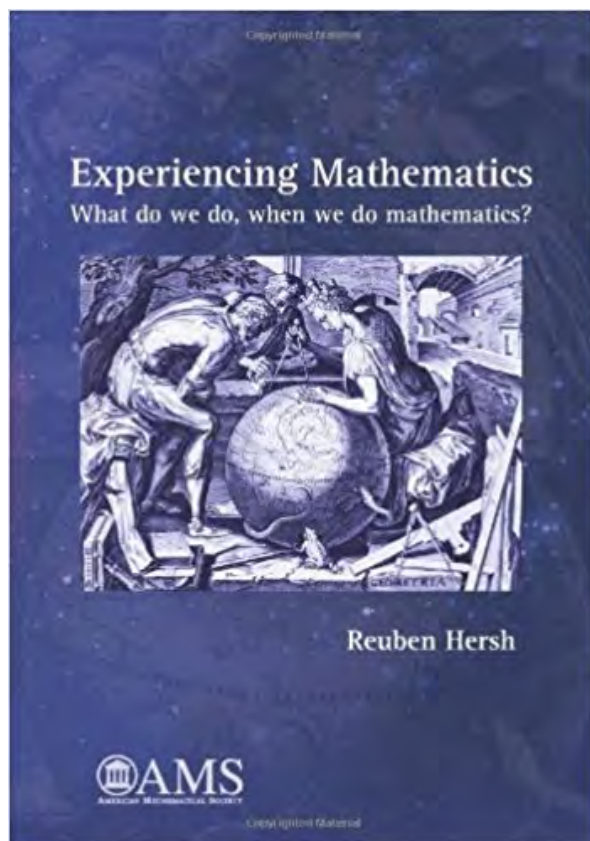
- [1] <http://www.foxmovies.com/movies/hidden-figures/posters/505/foxmovies-hiddenfigures-poster>.
- [2] <http://www.masswerk.at/keypunch/>.
- [3] <http://www.cozx.com/dpitts/ibm7090.html>.
- [4] G. Kranz. «Failure is not an option». Berkeley Books, 2000.
- [5] R. Peavey *et al.* «Project mercury real-time computational and data-flow system». In International Workshop on Managing Requirements Knowledge, 1961. Disponible a <http://www.computer.org/csdl/proceedings/afips/1961/5059/00/50590033-abs.html>.
- [6] M. L. Shetterly. «Hidden Figures». HarperCollins, 2016.
- [7] T. H. Skopinski and K. G. Johnson. «Determination of azimuth angle at burnout for placing a satellite over a selected Earth position». Technical report, NASA. Disponible a <http://www.sti.nasa.gov/>.

## Experiencing Mathematics. What do we do, when we do mathematics? de Reuben Hersh

Jaume Soler

Universitat Politècnica de Catalunya

Reuben Hersh és professor emèrit del Departament de Matemàtica i Estadística de la Universitat de New Mexico. La carrera acadèmica de Hersh és una mica inusual: nascut el 1927 a Nova York, Bachelor of Arts en literatura anglesa (Harvard 1946). Mentre treballava en un taller del metro de Nova York, un accident laboral va fer que es replantegés la vida: va estudiar matemàtiques al Courant Institute i es va doctorar el 1962 a la Universitat de Nova York sota la direcció de Peter Lax. A partir del 1964 és professor de la Universitat de New Mexico, amb diverses publicacions sobre equacions en derivades parcials i probabilitat.



El que fa Hersh inusual, si el que acabem d'explicar no fos prou rellevant, és el seu interès per la filosofia de les matemàtiques. Diem «filosofia» per manca d'una paraula més encertada. En realitat, l'interès de Hersh és sobre l'activitat quotidiana de les dones i dels homes que fem matemàtiques, tant si és recerca, docència, com anàlisi de riscos financers.

El que fem, com ho fem i per què ho fem. Segons explica ell mateix, en una certa època es va interessar per aquest tema i va pensar que la manera d'aprendre'n era impartir una assignatura bàsica sobre fonaments. Com que això passava als Estats Units, s'hi van poder matricular estudiants d'altres ciències i també de filosofia. La necessitat d'explicar a gent amb punts de vista externs a les matemàtiques va fer adonar-se a Hersh que la qüestió era més profunda del que semblava i que havia de transcendir els àmbits tradicionals de la lògica o de la filosofia de les matemàtiques feta des de la filosofia.

Arran d'aquest interès al qual s'ha dedicat amb passió, Hersh ha publicat diversos llibres. El primer és *The Mathematical Experience*, conjuntament amb Philip Davis el 1981. Els títols ja suggereixen que no és un autor convencional: *Descartes' Dream: The World According to Mathematics* (1986), *What Is Mathematics, Really?* (1997), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics* (2006), entre d'altres. El llibre que ens ocupa és una recopilació d'articles sobre temes ja tractats a *The Mathematical Experience*.

Hersh escriu amb un llenguatge acolorit i directe. Deia Niels Bohr, en una de les seves múltiples metàfores sobre el principi de complementarietat de la física quàntica, que no es pot ser simultàniament clar i precís. Reuben Hersh segueix aquesta pauta. Una de les seves afirmacions és: quan ha de parlar de filosofia, el matemàtic estàndard és platònic els dies feiners i formalista el cap de setmana.

Precisem-ho: a la pregunta de com avancen les matemàtiques respondrà que demostrant teoremes nous, obtenint nous resultats. Què vol dir obtenir? Demostrar o obtenir, vol dir, en llenguatge de carrer, descobrir. Podríem dir crear? Mai de la vida! Això nostre ja existia. Eterns i immutables, tots els teoremes (o només els que són certs?) existeixen des de sempre i per sempre en el món de les idees. Són necessaris en el sentit matemàtic del terme. Aquesta és la posició platònica, sostinguda per



una majoria àmplia de la professió, però potser només sostinguda «per defecte», com a relíquia de les controvèrsies sobre fonaments d'ara fa un segle i del programa formalista que Gödel va fer naufragar.

Aquí potser cal fer un incís: també hi ha una minoria, reconeguem que de vegades vista amb certa suspicàcia per la majoria, que no combrega amb Plató. Són els seguidors de Wittgenstein i la seva frase «els límits del meu llenguatge són els límits del meu món». És a dir, aquí no hi ha res més que un llenguatge i, en conseqüència, una invenció humana.



Seguim amb Hersh: el cap de setmana, quan no va atabalat pels passadissos de l'empresa, l'institut o la universitat, el nostre matemàtic es pot permetre una conversa distesa. Davant d'una cervesa, una col·lega li traurà l'argument que això de l'existència d'un món de les idees etern i immutable no lliga gaire amb el paradigma científic positivista actual (exactament on és, aquest lloc?). Un altre col·lega més sorneguer li dirà que, en el fons, els teoremes que sabem no passen de ser concentracions de substàncies químiques en el nostre cervell, amb la qual cosa tanquem la tòpica escala reduccionista: la biologia, en el fons, no és més que química (avançada), la química tothom sap que és part de la física; la física, de fet, són matemàtiques (la reina de les ciències, Gauss *dixit*), i les matemàtiques són... el resultat d'una activitat biològica (si en comptes de sorneguer el col·lega és molt sorneguer dirà «el subproducte» d'una activitat biològica). Sosté Hersh que quan la discussió arriba a aquest punt llavors el matemàtic estàndard s'atrinxera en el formalisme i afirma que, ben mirat, les matemàtiques només són llargues tires de símbols, amb unes regles estrictes sobre

quins poden anar de costat i quins no (Hilbert *dixit*). En principi les tires estan mancades de significat: si poden representar alguna cosa real, millor que millor, però si no és així, tampoc no passa res. Déu-n'hi-do, del salt de passar de l'eternitat del món de les idees a unes tires de símbols sense significat!

Hersh qualifica de «mite» la visió estrictament formalista. Aquesta suposada possibilitat de reduir qualsevol teorema a una successió de símbols, fent servir només una dotzena de caràcters i unes regles rígides, que fins i tot una màquina podria comprovar si és una successió «legal» o no, no és un mite? A part de les que es troben als *Principia Mathematica* de Russell i Whitehead, algú n'ha vist alguna altra? Hi ha una demostració d'aquest estil de, diguem, el teorema de la funció implícita? D'un teorema que es fa servir cada dia i que és una eina establerta de manera indiscutida? Hi ha un sol resultat del clàssic, mític (i una mica intimidant per als que no som d'anàlisi harmònica) *Trigonometric Series* d'Antoni Zygmund escrit en llenguatge formal? Si diem que es pot fer, com és que ningú no ho ha fet? Llavors, com sabem que es pot fer realment?

El que proposa Hersh és pensar les matemàtiques des d'un punt de vista humanista, enquadrat dins del corrent filosòfic que anomenem «constructivisme social». La realitat de la recerca i l'activitat matemàtica diària es força diferent de tot l'anterior, perquè la comunitat matemàtica no es preocupa gaire dels fonaments ni de la teoria deductiva de la demostració, sinó que la decisió final sobre si un teorema és cert o no acaba sent un judici col·lectiu de la comunitat. Segons Hersh, les matemàtiques són reals en el sentit de ser compartides per un conjunt d'individus que, de manera més o menys tàcita, estan d'acord sobre la majoria d'afirmacions i teoremes que componen el corpus de coneixements d'aquesta ciència. Però precisament per això les matemàtiques són també una fabricació humana, amb criteris d'acceptació sobreentesa que varien fins i tot d'una generació a la següent. Per justificar aquesta idea, Hersh fa una anàlisi en profunditat d'un grapat d'opinions de matemàtics de primera línia, de lògics i de filòsofs interessats per la filosofia de les matemàtiques. No és en absolut un estudi trivial o superficial, i la mateixa diversitat d'opinions justifica la

proposta de veure les matemàtiques com una disciplina complexa, polièdrica que si, d'una banda, necessita un llenguatge precís, i per tant més formal, d'altra banda, porta a terme l'activitat del dia a dia, inclòs el l'avenç mateix, d'una manera ben diferent.

Potser algú deixarà de banda amb un gest de la mà aquestes disquisicions assegurant que són irrelevantes, perquè el que interessa és el progrés de les matemàtiques i no pas discutir sobre com el portem a terme. Tanmateix, la qüestió de què fem, com i per què influeix de manera cabdal en una part important de l'activitat matemàtica: la transmissió dels coneixements. Hersh dedica una bona part del llibre a examinar les repercussions que tenen en la docència les diferents maneres de veure les matemàtiques, i sembla força evident que una activitat humana com és l'ensenyament

es veurà afavorida si al darrere hi ha una visió humanista. Més d'una vegada se sent defensar que l'exposició a classe ha de seguir uns paràmetres essencialment formalistes, i es fonamenta aquesta idea amb una afirmació taxativa: «Perquè les matemàtiques són això». Les matemàtiques són això, però al mateix temps també són moltes altres coses.

Recomanem la lectura del llibre de Hersh. Un *flyer* de l'editorial Springer que anunciava la publicació d'una de les obres de Hersh contenia una opinió de Sir Michael Atiyah: «I was pleasantly surprised to find that this book [*18 Unconventional Essays*] does not treat mathematics as dessicated formal logic but as a living organism, immediately recognizable to any working mathematician». Aquest comentari seria perfectament aplicable a *Experiencing Mathematics*.

## Desigualtats (primer premi del concurs de relats curts Cangur 2017)

Sílvia Casacuberta Puig  
Aula Escola Europea, Barcelona

El cel era gris i ombrívol. El nombre 101010 s'aixecà lentament del llit i es disposà a esmorzar. Mirà a través de la finestra i la fredor de l'ambient el va encongir. La tristor i melangia de l'ambient de fora accentuaven el sentiment de buidor que notava dins seu. El seu dia a dia era un constant patiment: contínuament havia de suportar burles i insults de la resta de nombres. Vivia en un sistema que estava completament jerarquitzat: aquells qui tenien les xifres més altes eren respectats i admirats; en canvi, aquells qui només tenien uns i zeros, com el 101010, eren discriminats i abandonats. Dia rere dia, l'101010 es trobava més entristit i més afligit i més angoixat. Mentre estava assegut amb la mirada perduda anava recordant els insults del dia anterior: «ets un nombre inútil», «només estàs format per xifres baixes», «no ets ningú»... no se'ls podia treure del cap i estava començant a creure que els altres nombres potser tenien raó. Va sospirar mentre una llàgrima s'escapava fugissera. Capcot,

va decidir que encara que es lamentés havia d'anar a treballar a la fàbrica de comes per als nombres amb decimals i es va aixecar de la taula.

L'101010 era a l'autobús reflexionant quan de sobte va notar que un altre nombre s'acostava. El que no s'imaginava és que seria la bonica 42: pensava nit i dia en ella. Era tan bella, només formada per dues potències de dos consecutives... L'101010 es quedà embadalit admirant-la. Però fins i tot la xifra 4 era massa alta per a ell, i la 42 el repudiava com tots els altres nombres. Sobresaltat, va cedir-li el seient. Tot i que en aquest cas ell ho feia per cortesia, era obligatori per llei deixar assegut a l'autobús aquells qui tinguessin almenys una xifra superior a totes les pròpies. L'101010 no sabia com expressar tot el que sentia per ella i començà a neguitejar-se. Amb un filet de veu va dir:

– Espero q...qu...-que... el d...-d...dia li vagi b... bé... –va balbucejar.

La 42 el va mirar amb menyspreu i va respondre amb un to sec:

– Disculpa, però no penso parlar amb els de la teva classe numeral –i es va girar fredament.

L'101010 abaixà ràpidament el cap perquè ningú no veiés el seu plor. Estava fart de viure en aquell món que l'escarnia. Va decidir baixar de l'autobús ja que no es veia capaç de seguir al costat d'ella després de les seves paraules punyents i plenes d'odi. Es va a posar a córrer pel carrer. No podia més... Va accelerar el pas mentre es tapava el rostre amb les mans. Per què havia nascut així? Per què era inferior als altres nombres? La impotència el rosegava per dins.

De sobte va notar un cop sec i va caure al terra, adolorit. Quan va aixecar els ulls es va adonar que havia impactat amb la respectadíssima i molt noble 999. Ella es trobava inconscient, estabornida al sòl. A causa de la gran velocitat que portava l'101010 ella s'havia donat un cop molt fort... tan fort que se li havia partit una cama i ara el seu tercer 9 semblava que fos un 0.

El cor de l'101010 s'encongí de por. Això era el pitjor que li podia passar a un nombre! Perdre la millor xifra de totes! El 9! I a més havia estat per culpa d'un idiota format només per zeros i uns. Era totalment impensable. De seguida va venir la policia i l'ambulància i es va trobar rodejat. Els nombres que passaven s'aturaven i observaven la situació amb incredulitat. Quina vergonya! El metge va inspeccionar la 999 i va sentenciar amb preocupació:

– Recuperarà la xifra, però ens portarà temps.

Es va sentir un murmuri sobresaltat entre la multitud. Els nombres van començar a reclamar un càstig per a l'101010.

– Ha insultat la nostra raça! –exclamà una 898.

– Un cop més la seva classe ha demostrat del que és capaç... –digué amb ràbia un 76.

– I pensar que ha convertit un 9 en un 0... un 0! La pitjor xifra de totes! –sospirà una 59.

– Que el tanquin! Que el tanquin! ?bramava la multitud enfurismada.

L'101010 va començar a suplicar i a demanar disculpes embogit.

– Clemència! Ha estat un accident! –implorà una vegada i una altra.

Però de res no van servir les seves paraules i al cap de poca estona es trobava tancat en una cel·la. L'havien sentenciat a 9 anys de presó. Estava desconsolat i no sabia com ho podria suportar. Començà a plorar desconsoladament sense ser capaç d'assimilar el gir de 180 graus que acabava de fer la seva vida. Mentre es lamentava del seu obscur futur va sentir algú que el cridava: «Xst! Tu, 101010, mira cap al costat». Ell es va girar i a la cel·la del costat va trobar un 110 somrient.

– Per fi puc parlar amb un altre nombre! –exclamà-. Portava una temporada tot sol.

– Per què ets aquí? –s'atreví a preguntar el 101010.

– És una llarga història... però bàsicament no vaig voler cedir el meu lloc de l'autobús a un 989.

El 101010 va fitar-lo amb sorpresa i admiració.

– De veritat? Ets molt valent! Jo li he trencat la cama a la senyora 999 en un xoc i ara la seva última xifra és un 0.

El 110 va arronsar les celles.

– T'ho faran pagar... Aquest món en què vivim no pot ser tan injust. Les coses han de canviar! Per què, eh, per què les xifres més altes han de tenir més drets? No té ni cap i peus!

– Deixa-ho estar, no hi podem fer res...

– Oi tant que podem! Hem de lluitar per la nostra dignitat com a nombres. No has sentit a parlar mai dels babilonis? Ells solien emprar el 60 com a base, i no pas el 10. I ells també vivien enmig d'abusos, de tirania i de despotisme. Però els partidaris de la base 10 van saber unir-se i vèncer. Malauradament, els nombres no aprenen dels errors del passat i tornen a caure en el mateix parany de la injustícia.

L'101010 es va quedar ben parat. Abans les coses havien estat diferents? Aleshores potser sí que es podien modificar...

– Però igualment estem aquí tancats. No podem sortir –digué tristament.

L'110 va eixamplar el somriure.

– T'he de confessar un altre secret. Però aquest és un secret ben gros! M'has de prometre que no ho explicaràs a ningú.

L'101010 el va mirar amb incredulitat i expectació.

– T'ho prometo! Serà un secret entre nosaltres.

– D'acord. Abans de venir aquí vaig estar investigant un llibre molt antic que vaig trobar en una biblioteca. Estava amagat entre uns cofres que provenien de temps molt llunyans. Tractava de màgia negra.

– Màgia negra? Suposo que ho dius de broma, oi? –exclamà l'101010 amb horror.

– És clar que no. És un art molt interessant i molt potent. Escolta'm bé. Tu vols sortir d'aquí sí o no?

– Sí! No desitjo res més.

– Doncs sé com ho pots fer. Els governadors han intentat que la tècnica que ara t'explicaré resti desconeguda, però jo l'he apresada igualment.

L'110 va treure una capseta de la butxaca lentament. L'obrí amb suavitat i en tragué un petit 2 d'or. L'101010 no entenia res.

– Com se suposa que m'ha d'ajudar aquesta xifra?

– Avui, quan siguin les 12 de la nit, frega't tot tu amb aquest 2 d'or mentre recites les paraules que ara t'ensenyaré. D'aquesta manera, podràs canviar de base!

– Canviar de base? De veritat és possible? Em pensava que era una llegenda –digué l'101010 emocionat–. Era el que sempre havia anhelat.

– Mentre et vagis fregant amb ell aniràs passant de base binària a base decimal. T'aniràs multiplicant per les seves potències. Tens unes quantes hores per aprendre't bé el que has de recitar –l'advertí l'110.

I així passaren la tarda. L'101010 estava ansiós per aprendre i començar una nova vida. Quan ja va ser fosc, l'110 preguntà:

– Estàs segur que seràs capaç de fer-ho?

– I tant! –cridà joiós ell.

– Però m'has de prometre que quan surtis d'aquí lluitaràs per a un futur millor. Fes-ho per mi.

– T'ho prometo.

– Quan t'hagis convertit avisa el guàrdia i explica-li que tu no ets l'101010 i que tot ha estat un error. No tindran cap motiu per retenir-te. Recorda, però, que hi ha un petit

inconvenient. L'encanteri dura només fins que surt el sol. I un cop t'hagis convertit ja no ho podràs tornar a fer mai més. Per aquest motiu jo ja no em puc canviar de base...

– Només?! I no s'hi pot fer res? –es lamentà l'101010.

– No. Aprofita bé les hores que tindràs.

Les campanes sonaren i l'101010 començà a recitar l'encanteri. Sortí el primer  $0 \cdot 2^0$  i a continuació un  $1 \cdot 2^1$ . Les potències s'anaren sumant fins a esdevenir  $2 + 8 + 32 = 42$ . Era el 42! Igual que la seva estimada! Ple de felicitat, el nou 42 mirà joiós el seu aspecte. Li semblava increïble que hagués deixat d'estar format per zeros i uns. Tal com havien acordat, cridà un guàrdia i li assegurà que ell no era el 101010 i que hi havia hagut una equivocació. El guàrdia, confós, revisà bé els papers i li digué que ell no tenia cap antecedent i que, per tan, t podia marxar. Abans de marxar, però, es girà cap al 110 i digué en un murmuri:

– Gràcies.

Es passà la nit caminant per la ciutat. No es podia creure que ningú no l'insultés, ni el discriminés, ni el menyspreés. Aprofità per anar en autobús, per poder entrar a botigues on hi havia cartells que prohibien l'entrada a uns i a zeros, per accedir a les altes zones de la ciutat... Allà la vida nocturna era ben activa. Quan ja estigué cansat decidí entrar en un bar. Mentre prenia la seva beguda en una ampolla de Klein tranquil·lament, la porta es tornà a obrir i entrà la 42 amb unes amigues. Ell no s'ho podia creure. Per primer i últim cop a la seva vida podria establir una conversació amb ella! Ben content, s'aixecà i l'anà a saludar.

– Sembla que compartim les mateixes xifres... Vol que la convidi a una beguda? –li digué amb un somriure.

Ella va riure (havia rigut per un comentari seu!) i respongué:

– És vostè molt agradable. Crec que accepto la invitació.

I durant una llarga estona estigueren conversant. El 42 (de fet, l'101010) delirava en un mar de felicitat i no es podia creure tot el que estava succeint. Per primera vegada era respectat i podia compartir la vetllada amb la seva estimada 42. Mentre ella li explicava

orgullosa que tota la seva família estava formada per xifres que eren potències de 2, el 42 se sobresaltà. Havia vist que per la porta hi començava a entrar una escletxa de llum... No! No podia haver passat tan ràpid...

– Què li passa? –preguntà sorpresa la 42.

– R..res... No és res i... important –quequejà atemorit el 42.

De sobte començà a sentir un dolor i es dividí entre 2. Va esdevenir el 21 i el residu de la divisió, 0, aparegué. Es va anar dividint successivament fins que tots els residus i l'últim quocient es van alinear i va tornar a ser l'101010. No quedava ni rastre del 42. Ella se'l va quedar mirant, bocabadada. No s'ho podia creure.

– Què has fet? Què ha passat? Ets un simple 101010?

Ell es va col·locar bé les xifres i es va escurar la gola. Tot el bar l'estava mirant. S'havia produït un canvi de base? No podia ser. L'101010 avançà cap al mig de la sala. Se sentia diferent. Ja no temia aquells nombres. Ja no creia que fossin superiors. Tot allò s'havia acabat.

– Sí, companys, jo soc en realitat un simple 101010. M'he passat la vida discriminat, insultat i repudiat pel simple fet que només estic format per uns i per zeros. Algun nombre d'aquesta sala em podria explicar per què la

xifra 9 té més drets que la xifra 0? Per què considerem que unes xifres són superiors a d'altres? Per què ens segreguem nosaltres mateixos? No hi ha absolutament cap motiu que ho justifiqui, i és absurd que existeixin desigualtats entre nosaltres a causa del nostre aspecte. Tots som nombres, al cap i a la fi. Tots ens podem sumar, multiplicar i restar independentment de qui siguem. Les matemàtiques avançarien molt més ràpidament si deixéssim que tothom participés en el nostre progrés, en comptes de deixar de banda aquells que són diferents. Com podem ser capaços d'enfosquir un coneixement tan bell? Per què ens entestem a perdre el temps fent lleis i proclamacions per anul·lar la felicitat d'altres nombres amb l'únic motiu de creure'ns superiors? Espero que el canvi de base que acabeu de veure vosaltres mateixos serveixi perquè us adoneu de com n'és de supèrflua l'aparença de les vostres xifres.

Aleshores dirigí la mirada cap a la 42 i afegí:

– I desitjo que, en un futur proper, els nombres com jo que només tenim xifres baixes puguem unir-nos amb els altres. Sense por. Sense desprestigi. Sense odi.

Ella li somrigué. No es podien ni imaginar que en pocs anys arribaria la informàtica i que els uns i els zeros tindrien una gran importància. Però això és una altra història.

## Racó biogràfic

### Leibniz: un poliedre de moltes cares

Eduard Recasens

Doctor en Ciències (Matemàtiques)

En aquesta segona part del «Racó biogràfic» dedicat a Leibniz, (per a la primera part vegeu la *SCM/Notícies* 39), es completa la seva biografia i es mostren algunes de les eines que va fer servir en la construcció del càlcul diferencial.

En la vida de Leibniz hi ha quatre etapes molt clares, cadascuna de les quals relacionades amb una ciutat. La primera ciutat és Leipzig

i correspon a la seva infantesa i estudis universitaris (vegeu *SCM/Notícies* 39). La segona és Mainz, ciutat on s'inicia com a conseller i jurista al servei de la noblesa. La tercera és París, on Leibniz descobrirà la matemàtica més avançada i és en aquesta ciutat on concebrà i donarà forma al càlcul diferencial. La quarta i última ciutat és Hannover, una petita ciutat de Saxònia en la qual resideix oficialment

durant quaranta anys i presta els seus serveis a la família regent amb els càrrecs de conseller, bibliotecari i historiador; al mateix temps, desenvoluparà molts altres projectes propis.

### Leipzig (1646–1667)

Leipzig, ciutat on Leibniz va néixer i va cursar els estudis de filosofia i dret. El grau de doctor en dret li atorgà la Universitat d'Altdorf el febrer del 1667; aquesta universitat li oferí un lloc com a docent però el va rebutjar, va preferir no quedar lligat a cap universitat, pensava que així tindria més llibertat per desenvolupar els seus propis projectes.

La formació matemàtica rebuda a l'etapa escolar va ser molt simple, aritmètica bàsica i alguna cosa dels *Elements* d'Euclides, però ell mateix va completar aquestes poques matemàtiques resolent problemes.

Allò que més caracteritza Leibniz al llarg de la seva vida és la seva constant recerca d'un principi unificador de tot el que passa al món, un principi que no podrà trobar dins la mateixa ciència i que haurà de buscar en el camp de la filosofia i la teologia. En el cas de la ciència es va proposar crear un llenguatge unificador, una llengua sense les ambigüitats del llenguatge ordinari, un llenguatge que construiria a partir d'un alfabet conceptual, en què les paraules, combinacions d'aquest alfabet, mostrarien amb evidència pictòrica les idees que representen.

Al llarg de la seva vida va intentar construir per diferents vies aquesta llengua científica que somniava però, malauradament, no ho va aconseguir. L'interès de Leibniz per aconseguir sòlides regles d'inferència en el terreny del coneixement es remunta als últims anys de l'escola bàsica, quan li van ensenyar els sil·logismes d'Aristòtil. Ell mateix va aprendre a argumentar sil·logísticament, i se servia d'aquesta tècnica per defensar les seves tesis. Allò que més admirava d'Aristòtil era que hagués aconseguit establir regles de deducció. Temps després va adonar-se que tot aquell sistema lògic es podia millorar si aconseguia dotar-lo d'unes regles de càlcul apropiades i, en aquest sentit, hi ha treballs de l'època de Hannover que són un clar antecedent de la lògica algebraica.

Per a la tesi d'habilitació a la Facultat de Filosofia de Leipzig va escriure sobre lògica del coneixement i aquest treball va ser la base d'un llibre de joventut, *Dissertació sobre l'art com-*

*binatori*, que es va publicar el 1666. El llibre, tot i que conté combinatòria, té un caràcter més lògic i filosòfic que no pas matemàtic. S'inspira en l'obra *Categories* d'Aristòtil i en el *Gran Art* de Ramon Llull. En aquest llibre Leibniz es proposa desenvolupar una lògica de la invenció enfront de la tradicional lògica de la deducció. Exposa com es podria obtenir nou coneixement a còpia de combinar conceptes simples i indescomponibles. Aquesta és la idea que troba al *Gran Art* de Llull, on l'insigne mallorquí utilitza un senzill mecanisme basat en rotacions de cercles concèntrics per fer les combinacions de conceptes bàsics, la idea de Leibniz va ser millorar Llull aplicant la combinatòria matemàtica.

### Mainz (1667–1672)

La primera feina de Leibniz va consistir a exercir de secretari i consultor jurídic del baró Johann von Boineburg, que llavors residia a Frankfurt, però, poc després, tot i que va seguir al servei de Boineburg, va acceptar posar-se al servei de l'elector de Mainz, Joan Felip Schönborn, motiu pel qual va establir la seva residència en aquesta ciutat. Leibniz va ser anomenat jutge de l'Alt Tribunal d'Apel·lació.

En aquesta època va començar a interessar-se per la nova mecànica i les matemàtiques però Mainz no era el lloc més adient si hom volia estar al corrent d'aquestes disciplines i entrar en contacte amb els seus principals cultivadors. El lloc adient, el millor, era París.

Havia escrit *Hypothesis physica nova* sobre el moviment i el xoc de cossos, i encara que el llibre era anònim, Christian Huygens va saber qui era l'autor, li va dir Henry Oldenburg, el secretari de la Royal Society; aquesta institució va publicar una segona edició del llibre.

L'ocasió per visitar París es va presentar quan el rei de França, Lluís XIV, va requerir a l'elector de Mainz que deixés passar pel Rhin els seus vaixells per envair Holanda. Schönborn, preocupat per l'ansia expansionista del rei francès, va demanar a Boineburg i Leibniz que intentessin desviar l'atenció de Luis XIV cap a una altra zona allunyada d'Europa. Aleshores se'ls va ocórrer proposar a Lluís XIV una incursió per terres egípcies i establir-hi una colònia francesa ja que la zona tenia gran valor estratègic i era clau per al comerç oriental.

## París (1672–1676)

El març del 1672 Leibniz, amb gairebé 26 anys, arribava a París. Malauradament, França i Anglaterra havien declarat la guerra a Holanda, i, per tant, la missió de distracció del rei francès ja no tenia sentit. Anys més tard, Napoleó Bonaparte recolliria aquesta idea.

Una vegada a París, Leibniz va quedar-s'hi un temps més ocupant-se d'altres assumptes relacionats amb Boineburg mentre continuava treballant per a Schönborn. Quan el desembre del 1672 va morir Boineburg i pel volts de febrer del 1673 va morir l'elector de Mainz, la situació laboral de Leibniz es va complicar però va aconseguir continuar a París encarregant-se d'altres tasques relacionades amb els successors de tots dos. Amb tot, amb el pas del temps es van enrarir les relacions i cada vegada tenia menys encàrrecs i per tant menys recursos, fins que va arribar un punt en què es va veure obligat a deixar París per anar a Hannover a la recerca d'una nova feina.

Va arribar a París amb una màquina de calcular inventada per ell, la qual, a més de sumar i restar, això ja ho feia la de Blaise Pascal, multiplicava i dividia; tenia la intenció de mostrar-la a l'Acadèmia de Ciències de París. Així mateix, també volia donar a conèixer alguns resultats i mètodes de sumació de sèries dels quals creia que era el descobridor. Però no sabia que altres ja els havien trobat; malauradament, no estava al corrent dels avenços de la matemàtica.

C. Huygens era llavors a París ja que el ministre Colbert havia sol·licitat els seus serveis per organitzar l'Acadèmia Real de Ciències, fundada el 1666. Leibniz i Huygens es van trobar per primera vegada la tardor del 1672. En aquesta trobada, després que Leibniz li confessés que havia trobat un mètode de sumació de sèries infinites que ell creia que era molt important, Huygens el va voler posar a prova i li va demanar que trobés la suma dels inversos dels nombres triangulars, una suma que Huygens ja coneixia i que anys abans havia resolt Pietro Mengoli. Encara que Leibniz no fos el primer a trobar la suma d'aquesta sèrie, per a ell el procediment va resultar ben il·luminador ja que, segons Leibniz va explicar més tard en un llibret sobre l'origen del càlcul diferencial, el procediment de sumes i diferències aritmètiques consecutives que havia utilitzat per trobar la

suma de la sèrie el va inspirar per descobrir la relació inversa entre diferenciació i integració (per a més detalls vegeu «Racó biogràfic», *SCM/Notícies* 39).

El gener del 1673, Leibniz va tenir ocasió de viatjar a Londres en una missió diplomàtica. Leibniz va ser invitat per Oldenburg a la reunió del dia 1 de febrer de la Societat per presentar el model de màquina de calcula. Malauradament la màquina no va funcionar del tot i Robert Hooke va trobar certs defectes en el mecanisme els quals va fer públics. En una altra ocasió en què va visitar al químic Robert Boyle es va trobar amb el matemàtic John Pell, que li va fer saber que alguns dels resultats sobre sèries que explicava com a propis ja els havia descobert François Regnauld. Malgrat que en general els matemàtics anglesos es van mostrar crítics i distants, Leibniz va fer amistat amb Oldenburg. En una altra de les reunions de la Royal Society, aquest va llegir una carta de René François de Sluse en la qual comunicava una regla per trobar les tangents a corbes expressades per equacions polinòmiques  $p(x, y) = 0$ . Aquest resultat tan valuós va ser àmpliament utilitzat per Leibniz en les seves investigacions del càlcul. També va llegir les «llicons geomètriques» d'Isaac Barrow. Oldenburg va expressar-li el seu desig de tornar-lo a convidar quan hagués perfeccionat el mecanisme de la màquina de calcular. Més endavant, el 19 d'abril d'aquell any, Oldenburg va aconseguir que l'admetessin com a membre de la Royal Society.

De retorn a París, Leibniz es va reunir novament amb Huygens i en aquesta segona trobada Huygens li va regalar una còpia del llibre acabat de publicar *Horologium Oscillatorium*. L'obra tractava del moviment pendular i per llegir-lo calia conèixer diverses qüestions relacionades amb el centre de gravetat. Huygens, per tal que Leibniz es posés al dia sobre centres de gravetat, quadratures i altres moltes qüestions, li va recomanar que llegís René Descartes, Honoré Fabri, James Gregory, Blaise Pascal, Gregory de St. Vincent i John Wallis. A continuació, Leibniz, durant més d'un any, es va dedicar a la lectura i estudi de tots aquests brillants matemàtics i el resultat no es va fer esperar.

Segons el mateix Leibniz, va ser mentre llegia el «tractat dels sinus d'un quart de

«cercle» de B. Pascal que es va fixar en l'ús d'un triangle infinitesimal especial que Pascal feia servir en el cas d'un cercle, aleshores va pensar que el triangle es podria fer servir per a les altres corbes; Leibniz l'anomenarà «triangle característic». Passo a descriure aquest triangle. Abans, però, cal recordar que Leibniz imaginava una corba com un polígon d'infinites costats infinitesimals i que les rectes tangents s'obtenien geomètricament perllongant els costats d'aquest polígon. Tinguem en compte que a l'època de Leibniz encara no es treballava amb el concepte de límit, ni tampoc hi havia el de nombre real.

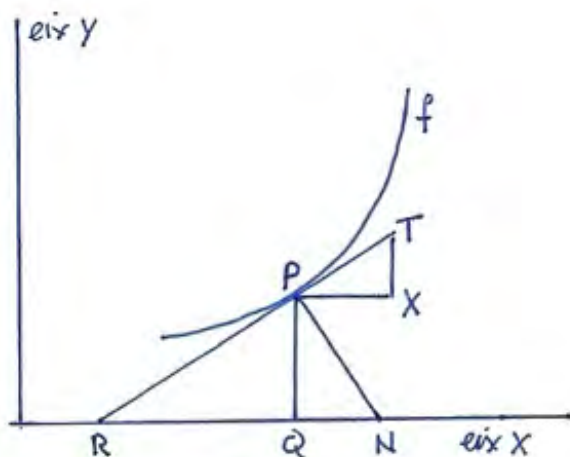


Figura 1

Consideris el triangle rectangle euclidià  $PXT$  associat a un punt  $P$  d'una corba  $f$ , (vegeu figura 1), format pel catet  $PX$ , el qual és un segment arbitrari paral·lel a l'eix d'abscisses  $X$ ; el catet  $XT$ , on  $T$  és un punt de la tangent geomètrica en  $P$ , i la hipotenusa, que és el tros de recta tangent determinat pel punt  $P$  i el punt  $T$ . Llavors, el «triangle característic» en el punt  $P$  és un triangle rectangle semblant i igualment disposat que el triangle euclidià  $PXT$ , però en el cas del característic la hipotenusa és un arc infinitesimal de la corba  $f$  que s'identifica amb un segment infinitesimal de la recta tangent en  $P$  que, per Leibniz, és un costat del polígon d'infinites costats infinitesimals que és la corba. Els catets d'aquest triangle característic són les corresponents diferències d'abscisses i ordenades, que també són segments infinitesimals.

A partir de la tardor del 1675, Leibniz va introduir la notació  $d$  per indicar la diferència entre dos valors d'una variable, amb aquesta notació,  $ds$  representa l'arc infinitesimal de

corba i  $dx$ ,  $dy$  les diferències d'abscisses i ordenades corresponents. Amb aquesta notació, la semblança entre el triangle  $PXT$  i el triangle característic s'expressa per la relació de proporcionalitat següent entre costats corresponents:

$$\frac{ds}{PT} = \frac{dx}{PX} = \frac{dy}{XT}.$$

Una relació de proporcionalitat que s'ha d'entendre en la geometria ordinària ampliada amb les diferències infinitesimals de Leibniz.

Leibniz utilitzava el triangle característic per trobar relacions algebraiques entre elements diferencials. Vegem com troba el «mètode de transmutació», una de les fórmules que fa servir més per relacionar integrals i que és equivalent al «mètode d'integració per parts».

Considerem el trapezi mixtilini  $ABCD$  de la figura 2, el qual està format per l'arc d'una corba  $y(x)$  d'extremes els punts  $A$  i  $B$ , i els tres segments rectilinis  $AC$ ,  $BD$ ,  $CD$ .

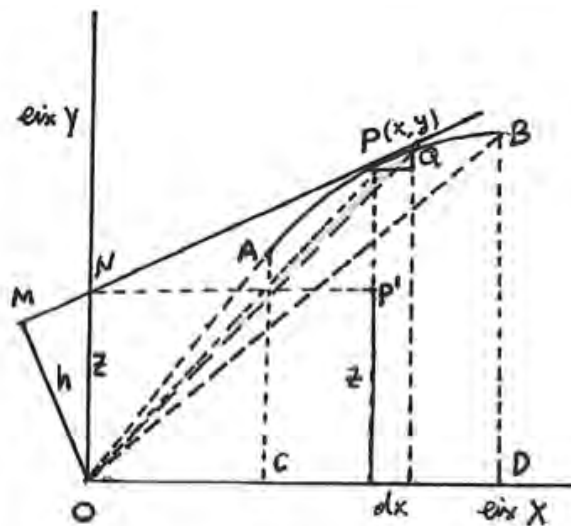


Figura 2

Seguint Leibniz, l'àrea d'aquest trapezi és la suma de les àrees dels infinits rectangles infinitesimals  $ydx$  que hi ha entre  $AC$  i  $BD$ .

$$\text{à}(ABCD) = \int ydx$$

(Leibniz no escrivia els límits d'integració com es fa ara.)

El teorema de transmutació relaciona l'àrea del trapezi mixtilini  $ABCD$  amb l'àrea del triangle mixtilini format per l'arc de corba  $AB$  i els costats  $OA$ ,  $OB$ .

Geomètricament aquesta relació és:

$$\begin{aligned} \text{à}(ABCD) &= \text{à}(OAB) + [\text{à}(OBD) - \text{à}(OAC)]. \quad (*) \end{aligned}$$



El sumand entre claudàtors és una diferència entre dos triangles rectilinis.

L'àrea del triangle mixtilini  $OAB$  és la suma infinita de les àrees dels triangles radiats des del punt  $O$  que tenen per base els costats del polígon infinitesimal entre els punts  $A$  i  $B$ . Cadascun d'aquests triangles infinitesimals té àrea  $\frac{1}{2}hds$  i l'àrea del triangle mixtilini  $OAB$  és:

$$\Delta(OAB) = \int \frac{1}{2}hds.$$

La semblança del triangle rectangle  $MNO$  amb el triangle  $PNP'$  i aquest amb el triangle característic, permet escriure la proporció

$$\frac{ds}{dx} = \frac{z}{h};$$

i d'aquí la relació diferencial següent:

$$hds = zdx,$$

i, per tant:

$$\int \frac{1}{2}hds = \int \frac{1}{2}zdx.$$

Si escrivim la relació geomètrica d'àrees (\*) utilitzant les expressions integrals obtingudes, resulta la igualtat (\*\*):

$$\int ydx = \frac{1}{2} \int zdx + \left[ \frac{1}{2}OD \cdot DB - \frac{1}{2}OC \cdot CA \right].$$

Aquesta última igualtat és el teorema de transmutació.

Observeu que el teorema de transmutació relaciona la integral d'una corba  $y$ -ordenada d'abscissa  $x$  amb la integral d'una corba  $z$ -ordenada d'abscissa  $x$ . Aquesta corba  $z$  s'obté geomètricament de la manera següent: la recta tangent en  $P$  talla l'eix d'ordenades en un punt  $N$ , llavors la paral·lela a l'eix d'abscisses per  $N$  talla l'ordenada de  $P$  en un punt  $P'$ . En recórrer  $P$  l'arc de corba entre  $A$  i  $B$  el punt  $P'$  recorre una certa corba que és la que anomenem « $z$ ». Aquesta  $z(x)$  és la corba que apareix en el teorema de transmutació, i, observant la figura 2, es pot veure fàcilment que l'expressió analítica de la corba  $z(x)$  és:

$$z = y - x \frac{dy}{dx}.$$

També va fer servir el triangle característic per resoldre aquells problemes que demanaven

les corbes, les tangents o les normals de les quals complien certes condicions. Leibniz va trobar, per exemple, les corbes les subnormals de les quals són inversament proporcionals a les ordenades. Aquest va ser un dels primers exemples històrics de resolució d'una equació diferencial i d'aplicació del mètode de separació de variables. Ho va fer de la manera següent:

Si considerem el triangle rectangle  $PQN$  de la figura 1, en el qual la hipotenusa és el segment de normal  $PN$  i els catets són l'ordenada  $PQ = y$  i la subnormal  $QN$ , aquest triangle  $PQN$  és semblant al triangle característic; per tant, es pot escriure la relació de proporcionalitat següent:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QN}{y}.$$

La condició sobre les normals és:

$$QN = \frac{k}{y}$$

d'aquí resulta la igualtat diferencial

$$kdx = y^2dy,$$

de la qual, una vegada aplicat el procés de sumació leibnizià a cada costat:

$$\int kdx = \int y^2dx.$$

Resulta que són corbes cúbiques.

El matemàtic suís Jakob Bernoulli va ser qui va proposar a Leibniz la paraula *integració* com a substitutiva de la paraula sumació. L'emblemàtic signe d'integració, la  $S$  allargada de la paraula llatina summa, és de Leibniz, l'utilitzà per primera vegada en un manuscrit del 29 d'octubre de 1675, abans havia utilitzat el símbol  $Omn.$  de Cavalieri. En aquest mateix manuscrit va introduir la lletra  $d$  per expressar les diferències de les variables.

La resolució d'equacions diferencials era anomenada per Leibniz «mètode invers de les tangents». Amb aquest mètode va poder resoldre problemes que continuaven oberts des de feia temps, per exemple, el problema que Florimond de Beaune havia plantejat a Descartes, en el qual es demanava quines eren aquelles corbes la subtangent de les quals tenien un valor a constant. La semblança del triangle característic amb el triangle rectangle  $PRQ$  (vegeu figura 1), d'hipotenusa el segment de recta tangent  $PR$ , i catets  $PQ$ ,  $RQ$ , sent  $PQ$  igual a l'ordenada  $y$  del punt  $P$  i  $RQ$  la

subtangents de valor constant  $a$ , permet escriure la proporció:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}.$$

De la qual, aplicant el mètode de separació de variables, Leibniz conclou que la variable  $x$  depèn logarítmicament de la variable  $y$ .

Tots aquests resultats i molts d'altres mostren a Leibniz la potència del mètode de càlcul que havia creat, malauradament, aquells profitosos anys de París s'acostaven al final. Una molt debilitada situació econòmica, com a conseqüència dels pocs lligams que tenia amb Mainz i atès que no aconseguia obtenir una plaça remunerada a l'Acadèmia de Ciències, ni tampoc la càtedra que havia deixat vacant Robert Roberval, van fer que acabés acceptant el treball que li oferia el duc regent Johann Friedrich a Hannover com a conseller i bibliotecari. Leibniz havia donat la seva conformitat el gener del 1676 però va ajornar la seva marxa tant com va poder, no va deixar París fins l'octubre i tampoc no hi va anar directament sinó que primer va passar per Londres i després per Holanda. Arribava a Hannover cap a finals de desembre.

Havia passat a París quatre anys i mig i havia valgut la pena, Leibniz havia arribat a la capital francesa amb escassos coneixements de matemàtica superior i marxava d'aquella ciutat no tan sols coneixent la matemàtica més avançada sinó que ell mateix havia col·laborat notablement al seu progrés creant el càlcul diferencial directe i invers. Durant els anys de Hannover continuaria amb el càlcul diferencial i també estudiaria altres branques de la matemàtica però ja no seria el mateix, una multitud de tasques que no tenien a veure amb les matemàtiques l'esperaven.

Leibniz va passar per Londres abans d'anar a Hannover per lliurar a Oldenburg el model perfeccionat de la seva màquina de calcular, havia fet una presentació del nou model a l'Acadèmia de Ciències de París i havia estat un èxit, però hi havia un altre motiu més important, ja feia temps que Leibniz havia comunicat a Oldenburg alguns resultats del seu càlcul i aquest li havia contestat que allò que li explicava ja ho havien trobat Newton i Gregory. Havent demanat a Oldenburg més

informació sobre què havien fet, la resposta només contenia desenvolupaments en sèrie de potències, del sinus, de l'arcsinus, de la tangent, de l'arctangent, i algunes quadratures, però no hi havia cap explicació de com s'havien obtingut. Leibniz va decidir visitar John Collins, matemàtic que tenia al seu càrrec la biblioteca de la Royal Society, per demanar-li més informació sobre el mètode dels desenvolupaments en sèrie. Collins li va mostrar, sense que Newton ho sabés, un esborrany del llibre *De Analysi* on hi havia tots els continguts que feien referència als desenvolupaments en sèrie, Newton ho havia escrit el 1669 però el llibre no es va publicar fins al 1711. Més endavant, Leibniz va demanar a Oldenburg més detalls sobre els mètodes de Newton i va ser en aquell moment en què Newton va decidir respondre. En una primera carta (13 juny de 1676) li tornava a presentar alguns resultats sobre sèries però sense cap demostració; Leibniz li va respondre (17 agost 1676) i va continuar preguntant sobre el mètode de càlcul. Newton, en una segona carta (24 octubre 1676), li va parlar de fluxions d'una manera totalment incomprensible per mitjà de dos anagrames. El primer deia així: «6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx». El segon era més llarg: «5accdae10effh12i4l3m10n6oqqr7s11t9v3x:11ab3cdd10eaeg10ill4mtn6033q6r5s11t8vx,3acae4egh5i414m5n8oq4r3s6t4vaaddaeeeeijmmnnoprrrrssssttuu».

Amb aquesta informació tan explícita Newton donava per començada i acabada la seva explicació a Leibniz del seu mètode de fluxions. Al cap de disset anys, John Wallis va fer públiques les explicacions dels anagrames en el segon volum de la seva *Opera mathematica* publicada el 1693.

Les dues cartes de Newton més el fet que Leibniz havia llegit el *De Analysi* en el seu segon viatge a Londres van ser utilitzades reiteradament per aquells que anys més tard l'acusarien d'haver plagiat el càlcul de Newton.

La segona estada de Leibniz a Londres va durar uns deu dies, després va marxar cap a Holanda. A Amsterdam va visitar el matemàtic Jan Hudde, a l'Haia va debatre amb Baruch Espinoza sobre ètica i teologia i a Delft, Anton van Leeuwenhock li mostrà el món dels mi-

croorganismes a través del microscopi. Leibniz, després d'haver creat el món de les diferències infinitesimals, el va entusiasmar aquella mostra d'un món viu amb éssers tan diminuts, uns éssers que no es podien veure a simple vista però que exercien una gran influència en el món visible.

### **Hannover (1676–1716)**

Leibniz arribà finalment a Hannover a finals de desembre del 1676. S'obriria un llarg període de quaranta anys en el qual Leibniz posaria al descobert una gran capacitat de treball exercint al mateix temps una gran quantitat de tasques ben diverses. En aquests anys, va servir a un total de tres governants de Hannover: Johann Friedrich, Ernst August i George Ludwig.

### **Johann Friedrich 1676–1679**

El primer, el duc Johann Friedrich, va ser un home que va trobar en Leibniz la persona ideal per compartir les seves inquietuds culturals i científiques. El va nomenar conseller privat, circumstància que li va suposar tenir un bon salari i un rang elevat a la cort.

Leibniz va proposar al duc un nou sistema de classificació de llibres i documents i l'adquisició de nous volums per posar la biblioteca al dia dels nous corrents científics i filosòfics.

Com a conseller va presentar diverses propostes a Johann Friedrich, reformes en l'administració pública, diversos plans agrícoles, la creació d'una acadèmia de comerç i idiomes, la creació d'una oficina d'informació pública, creació de plans de pensions per a viudes i orfes, etcètera. El projecte més ambiciós consistia a millorar el sistema de drenatge de les mines de la regió del Harz, de les quals s'obtenia coure, ferro, plom i plata, i proposava la utilització de molins de vent que ell havia inventat.

Leibniz estava convençut que amb aquest projecte de les mines s'obtidrien molts diners i que n'hi hauria prou per poder finançar una acadèmia de les ciències dels països germànics, un lloc per estar al dia dels nous corrents científics i fer recerca de primera línia. En concret, pensava que en el si d'aquesta acadèmia podria formar un equip d'investigació per portar a cap el seu projecte somiat de crear una llengua universal. Aquest nou llenguatge s'havia de construir a partir d'un alfabet con-

ceptual, els signes del qual havien de ser transmissors d'idees bàsiques. Les paraules no havien de ser una combinació de signes sense significat propi, com passa en el llenguatge ordinari, sinó que les paraules eren com un dibuix del concepte que representaven i, a més, havia de ser un llenguatge operatiu tal com ho és l'àlgebra per a les matemàtiques. Leibniz l'anomenava «característica universal», i, en el seu somni, amb aquest llenguatge es podria dirimir qualsevol conflicte simplement «calculant». Leibniz va veure en el llenguatge xinès un precedent d'allò que ell pensava, i per això es va mostrar molt interessat per la cultura xinesa i va buscar vies de contacte amb la Xina.

### **Ernst August 1679–1698**

Johann Friedrich va morir el 1679 i el succeí el seu germà Ernst August, un home d'Estat que li importaven ben poc les inquietuds filosòfiques i científiques de Leibniz. No obstant això, va mantenir-hi bones relacions.

El 1680 Ernst August va donar llum verda al projecte de les mines, però el projecte només va durar cinc anys. El 1685 es va cancel·lar ja que requeria molta inversió i no donava els guanys esperats sinó pèrdues; d'altra banda, els miners hi estaven en contra, veien en Leibniz un intrús. Els molins havien estat ben dissenyats i ben construïts, però a l'hora de la veritat no feia prou vent, Leibniz no havia tingut en compte la meteorologia local.

Amb el cessament del projecte, la iniciativa d'una acadèmia de les ciències també va quedar suspesa i, de retruc, tampoc no es va poder formar un equip per treballar el projecte de llengua universal. Leibniz, però, va seguir treballant-hi, com ho confirmen els diferents manuscrits que s'han trobat amb diversos intents de formulació d'aquesta llengua.

Quan Ernst August va succeir el seu germà, Leibniz, a fi d'assegurar-se el lloc de treball, li va presentar un memoràndum amb una gran quantitat de projectes, entre els quals hi havia una proposta per redactar la història de la família Brunswick; es volia demostrar el parentesc amb determinades famílies nobles (Güelf i Este) perquè Hannover fos declarat un electorat. Leibniz sabia que per dur a terme aquest estudi genealògic hauria de visitar diverses biblioteques i seria un bon motiu per deixar Hannover algunes temporades i podria atendre

els seus propis projectes. D'aquesta manera Leibniz va poder viatjar pel sud d'Alemanya, per Àustria i per Itàlia.

Durant el període d'Ernst August, Leibniz va continuar treballant el càlcul diferencial i altres temes matemàtics. En aquests últims va fer contribucions originals però que no van tenir gaire ressò en el seu temps, com ara:

- Introduí determinants i anticipà la regla de Cramer per als sistemes lineals.
- Proposà diversos camins per algebritzar la lògica tradicional.
- Introduí el sistema binari de representació dels nombres i la seva aritmètica.
- Proposà una nova edificació i una nova manera de tractar la geometria la qual anomenà «Analysi Situs».

També treballà en estadística i probabilitat, que aplicà a diversos jocs i a la jurisprudència.

Pel que fa al càlcul, Leibniz va ser el primer a publicar sobre el càlcul diferencial. Va escriure un article que va ser publicat a la revista *Acta Eruditorum* en el número d'octubre del 1684 (Newton no publicaria sobre fluxions fins al 1704, ho va fer en un apèndix al seu llibre d'òptica). El títol de l'article de Leibniz és «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus», un títol llarg en què es diu que presenta un nou mètode per trobar màxims i mínims i també tangents, encara que les expressions siguin fraccionàries o irracionals sense que hi hagi necessitat de distingir-les.

Un article força enrevessat del qual Johann Bernoulli va assegurar que semblava més un enigma que no pas una explicació. Leibniz comença l'article donant la definició de diferencial d'una variable  $y$ , el que més sorprèn és que, llevat del llenguatge geomètric que fa servir, la definició que dona és exactament la que es fa servir avui.

De manera abreujada, allò que diu és el següent: si es considera un punt  $P(x, y)$  d'una corba  $y(x)$  i *subt* és el segment subtangent de la corba en aquest punt  $P$ , llavors, donat un segment  $dx$  arbitrari,  $dy$  és aquell segment que

compleix la proporció:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{subt}.$$

Després d'haver donat aquesta definició, Leibniz presenta les regles algebraiques que regeixen el comportament de les diferencials: diferencial d'una suma, d'un producte, d'un quocient, etcètera, i, entre altres consideracions, estableix les condicions  $dy = 0$  per a màxims o mínims i  $ddy = 0$  per a punts d'inflexió. Acaba l'article amb la resolució del problema que Florimond de Beaune havia plantejat a Descartes i que aquest no havia pogut resoldre (vegeu pàgina 87 d'aquest «Racó biogràfic»).

*Acta Eruditorum* era una revista científica amb periodicitat mensual, fundada a Leipzig el 1682, que volia ser per als estats germànics allò que el *Journal de Sçavans* era per als francesos o el *Philosophical Transactions* per als britànics. Leibniz en va ser fundador a partir de la proposta que li va fer el professor Otto Mencke, de la Universitat de Leipzig. Molts dels articles de Leibniz es van publicar en aquesta revista. Ja el primer número contenia un article de Leibniz sobre la quadratura aritmètica del cercle que ell havia descobert el 1673 a París. En el número següent va escriure un article en el qual presentava una deducció matemàtica de les lleis de l'òptica fent servir el principi segons el qual la llum viatja seguint la trajectòria de mínima resistència; després d'aquests dos primers articles en van seguir molts altres.

Els matemàtics suïssos Jakob i Johann Bernoulli van ser els primers i principals divulgadors del càlcul diferencial, que utilitzaven principalment per resoldre problemes de la física relacionats amb corbes mecàniques. Per exemple, entre d'altres, van trobar la forma que adoptava una corda flexible i homogènia quan només es fixava pels extrems i sobre aquesta només hi actuava la gravetat.

Anys després, el 1696, el marquès Guillaume de l'Hôpital, a partir d'unes classes que particularment li havia fet Johann Bernoulli, va publicar el primer llibre de text sobre càlcul diferencial: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*.

En aquests anys, una manera de mostrar a la comunitat matemàtica la potència del càlcul diferencial va ser la de proposar, a través de les revistes com *Acta Eruditorum*,

problemes que difícilment es podien resoldre sense utilitzar-lo. El juny del 1696 Johann Bernoulli va proposar buscar quina era la corba per la qual un cos sotmès només a la gravetat baixava en el menor temps possible entre dos punts que no estaven ni en posició horitzontal ni en posició vertical. Es van rebre quatre solucions a *Acta Eruditorum*: la de l'Hôpital, la de Jakob Bernoulli, la de Johann Bernoulli i la de Leibniz, però hi va haver una cinquena solució que va ser presentada al *Philosophical Transactions*, a càrrec de Newton. Llevat de la de l'Hôpital, totes les altres solucions eren correctes: es tractava de la corba cicloide.

### George Ludwig 1698–1716

Ernst August va morir l'any 1698 i el va succeir el seu fill primogènit George Ludwig. Ludwig es va mostrar sempre en desacord amb les maneres de fer de Leibniz, el neguitejava no saber mai què feia ni on era, més tenint en compte que encara no havia presentat res per escrit sobre la història de la seva família. Fins al punt que va decidir prohibir-li que s'absentés de Hannover sense el seu permís escrit, però Leibniz sempre trobava motius i maneres per absentar-se llargues temporades, ja fos per anar a l'Acadèmia de Ciències de Berlín, de la qual va ser fundador i el primer president des del 1700, o bé per anar al palau de Charlottenburg (Berlín) per trobar-se amb Sofia Carlota, germana de George Ludwig i esposa de l'elector de Brandenburg, i parlar de filosofia i teologia, o per anar a Wolfenbüttel i atendre assumptes de la biblioteca de la qual era responsable, o per viatjar Viena com a conseller de l'emperador del Sacre Imperi, o per anar a trobar-se amb el tsar Pere el Gran, que li va demanar consell per crear una acadèmia, i un llarg etcètera d'activitats i assumptes de tota mena.

Tot i les seves múltiples ocupacions Leibniz no desatenia els assumptes de la Casa de Hannover, havia aconseguit que el ducat de Hannover fos declarat un electorat del Sacre Imperi, i, el 1701 va fer possible que es reconeguessin els drets successoris de la família Brunswick a la Corona anglesa en el cas de mort sense descendència; i això és el que va passar l'any 1714. George Ludwig de Hannover va ser coronat rei d'Anglaterra amb el nom de George I. Això va fer pensar a Leibniz que podria canviar la

ciutat provinciana de Hannover per Londres; estava convençut que el rei, en agraïment a les gestions que havia fet perquè tot anés rodat, li oferiria la possibilitat de formar part del seu seguici. Però no va passar res d'això, George Ludwig el continuava menystenint, i va ordenar a Leibniz que es quedés a Hannover i acabés d'una vegada la història de la família Brunswick. Leibniz va escriure'n dos volums però no va aconseguir acabar-la.

Aquests últims anys a Hannover van ser d'una gran soledat, Leibniz no s'havia casat però havia mantingut una gran activitat social. Durant aquests quaranta anys s'havia relacionat amb les elits del món intel·lectual i polític europeu, com queda ben palès en els milers de cartes que ens ha deixat. Ara, però, semblava que tot li anava en contra. D'una banda, li faltaven les seves principals confidents, Sofia Carlota, que havia mort el 1705 d'una pneumònia, i la mare d'aquesta, la princesa Sofia, que va morir el 1714. D'altra banda, es van incrementar els atacs de gota que ja patia des de feia uns anys i que el deixaven immòbil. Per a més inri, aquests últims anys van ser els pitjors pel que feia a la polèmica sobre la prioritat en la creació del càlcul. La història d'aquesta polèmica és llarga i subtil i no es pot relatar en un breu espai com aquest, només escriuré quatre línies sobre com va acabar; per a un relat detallat vegeu Durán (2006). L'enduriment de la confrontació s'inicià el 1708 quan John Keill, matemàtic britànic de la Universitat d'Oxford, en una comunicació al *Philosophical Transactions*, va acusar Leibniz d'haver plagiat Newton. Leibniz va demanar a la Royal Society que intervingués en aquest assumpte i l'entitat, que en aquells moments estava presidida per Newton, va decidir constituir una comissió de sis membres perquè jutgessin el fet i donessin el seu veredict. El dictamen final va establir que Newton havia estat el primer inventor del càlcul i que el mètode diferencial i el de fluxions eren una mateixa cosa amb noms i notacions diferents. Allò que no es deia enlloc és que, si bé Newton havia precedit Leibniz en uns deu anys, aquest últim havia estat el primer a publicar els resultats. Amb el nom de *Commercium Epistolicum*, el 1712, es va editar un volum amb el dictamen i els documents que la comissió havia fet servir,

però va tenir una distribució molt reduïda. Leibniz, per exemple, es va assabentar de la seva existència a través de Johann Bernoulli, que n'havia rebut una còpia d'un nebot que havia estat a París. Leibniz va contestar el *Commercium Epistolicum* mitjançant la *Charta Volans*, una carta anònima, que va ser distribuïda pel continent i que es va publicar a *Acta Eruditorum*, en la qual Newton era acusat d'haver plagiat Leibniz després que aquest últim li hagués comentat el seu mètode diferencial a les cartes de resposta a aquelles cartes encriptades que Newton li havia enviat el 1676 en què es parlava del mètode de les fluxions. Newton, enfurismat, va contestar la *Charta Volans* escrivint un llarg relat de com, segons ell, havia anat tot l'assumpte de la creació del càlcul, relat que va inserir en una ressenya que va escriure del *Commercium Epistolicum* i es va publicar al *Philosophical Transactions* del 1715. En aquell moment Leibniz va decidir escriure com havia anat la creació del càlcul diferencial, en la *Historia et origo calculi differentialis*, que no es va publicar fins molts anys després de la seva mort, que va tenir lloc el mateix any 1716, en què escrivia la història i l'origen del càlcul diferencial.

La polèmica va continuar al llarg del segle XVIII i durant aquest segle la societat matemàtica va quedar dividida irremeiablement entre britànics seguidors del càlcul fluxional i continentals seguidors del càlcul diferencial.

Leibniz va morir el 13 de novembre de 1716, tenia 70 anys. A l'enterrament no hi va assistir cap representant de la cort.

Deixava escrits molts articles sobre tota mena de temes, molts manuscrits, nombrosos esborranys i alguns llibres i, a més, una quantitat aclaparadora de cartes (unes deu mil); a banda, hi havia les cartes rebudes (deu mil més). Un llegat que encara avui s'estudia.

## Referències

- [1] J. Aiton. «Leibniz. Una biografia» (1985), Alianza Editorial.
- [2] A.J. Durán. «La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal». (2006), Ed. Crítica.
- [3] C.H. Edwards. *The Historical Development Of The Calculus*. Springer-Verlag (1979).

## Problemes

Carles Romero, Juanjo Rué  
IES Manuel Blancafort, la Garriga, UPC

Teniu a les mans una nova sessió de problemes de la *SCM/Notícies*, aquest cop amb alguns canvis, començant amb una edició a quatre mans de la secció.

*Carles Romero*: Efectivament, la vida segueix, però els actors van canviant. Aquestes ratlles són, en primer lloc, per donar la benvinguda a Juanjo Rué, responsable d'aquesta secció de problemes de la *SCM/Notícies* a partir d'ara mateix. I, després, per acomiadar-me d'aquesta feina, que va traspasar-me Pelegrí Viader, ara fa disset anys i 25 números de la revista!

Ara, doncs, toca mostrar el meu agraïment a tots els que hi heu contribuït, sigui amb propostes de problemes, sigui amb solucions i, també, a la Societat Catalana de Matemàtiques, que m'ha proporcionat els mitjans i la satisfacció de poder portar a terme aquesta tasca.

Gràcies a tothom!

*Juanjo Rué*: Primer de tot, agrair a en Carles i a l'equip editorial de la *SCM/Notícies*, tant el pas del testimoni com la confiança mostrada. En tot cas, espero poder fer, ni que sigui, la meitat de bona feina que en Carles ha estat fent durant tantes i tantes edicions de la revista, tot encarregant-se de tants i tants problemes que ens han entretingut molt en els últims anys.

Anem, doncs, a les matemàtiques. Hem rebut solucions per a tots els problemes proposats en el número anterior. En especial, agraïm el treball fet per Miquel Amengual Covas de Cala Figuera, a Mallorca; per Esteve Casas, de l'Institut Baix Montseny, a Sant Celoni, i per Joaquim Nadal i Vidal, de Llagostera, a la Selva. Ha costat triar d'entre totes les seves solucions, totes elles molt originals.

Per aquest nou número tenim quatre nous problemes: dos de geometria (proposats per Miquel Amengual Covas i Joaquim Nadal i Vidal), un de desigualtats (proposat per José Luis Díaz-Barrero) i un de caire aritmètic i combinatori proposat per l'editorial. Agraïm a tots ells la seva contribució, que ens farà gaudir a tots d'uns bons enigmes matemàtics.

Per acabar, una mica de nova informació de contacte: per col·laborar en aquesta secció (tant proposant com solucionant problemes), el nou correu electrònic per a enviaments és:

juan.jose.rue@upc.edu.

Agraïrem efusivament els materials escrits en T<sub>E</sub>X o LaT<sub>E</sub>X que incloguin els fitxers \*.tex font i les figures corresponents. Ara toca engrescar-se amb la nova llista de problemes!

## Problemes proposats

**A141.** (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera. Girona.)

En un triangle  $\triangle ABC$  traceu (mitjançant regla i compàs) una recta paral·lela  $l$  a la base  $BC$  que talli els costats  $AB$  i  $AC$  en els punts  $D$  i  $E$ , respectivament, tal que  $BD + CE = BC$ .

**A142.** (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC BarcelonaTech, Barcelona.)

Siguin  $a, b$  dos nombres reals positius. Demostreu que:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{b}}\right) + \sqrt{\frac{a(1+\sqrt{b})^2 + b(1+\sqrt{a})^2}{ab + (1+\sqrt{a})^2(1+\sqrt{b})^2}} < 1.$$

**A143.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui  $\triangle ABC$  un triangle tal que  $\widehat{BAC} > 90^\circ$ . Siguin  $D, E$  punts sobre el segment  $BC$ , de manera que  $AD \perp AC$  i  $AE \perp AB$ . Sigui  $H$  el peu de la perpendicular de  $A$  a  $BC$ . Suposant que:

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{AH},$$

determineu l'angle  $\widehat{BAC}$ .

**A144.** (Proposat per l'editorial.)

Sigui  $A$  un conjunt de nombres enters positius. Definim la funció  $R_A(n)$  com el nombre de solucions de l'equació  $n = x + y$  amb  $x, y \in A$  i  $x \leq y$ . Demostreu que si  $A$  és infinit aleshores, per  $n$  suficientment gran,  $R_A(n)$  no pot ser una funció constant.

## Solucions

**A137.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

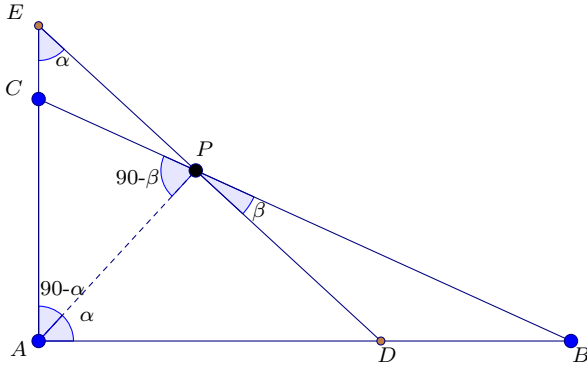
Sigui  $P$  un punt del costat  $BC$  d'un triangle  $\triangle ABC$ . La recta perpendicular a  $AP$  per  $P$  talla  $AB$  i  $CA$  en els punts  $D$  i  $E$ , respectivament.

1) Demostreu que si  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ , aleshores  $\frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \frac{BP}{PC}$ .

2) Si es compleix que  $\frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \frac{BP}{PC}$ , proveu o refuseu que  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ .

**Solució:** (Solució d'Esteve Casas, Institut Baix Montseny, Sant Celoni.)

Escrivim  $\alpha = \widehat{AEB} = \widehat{PAB}$ ,  $\beta = \widehat{CDE} = \widehat{DPB}$ , amb la qual cosa la figura que hem d'estudiar és la següent:



És clar que els triangles rectangles  $\triangle DPA$ ,  $\triangle APE$  i  $\triangle DAE$  són semblants. Aplicant el teorema del sinus al triangle  $\triangle APC$  obtenim el següent:

$$\frac{PC}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{CA}{\sin(90 - \beta)} \quad (1)$$

$$\implies \frac{PC}{\cos(\alpha)} = \frac{CA}{\cos(\beta)}.$$

Apliquem ara el teorema del sinus al triangle  $\triangle ABP$ , i tenim que:

$$\frac{PB}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(90 + \beta)} \implies \frac{PB}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\cos(\beta)}. \quad (2)$$

Per tant, de les equacions (1) i (2) en deduïm el següent:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}. \quad (3)$$

Ara bé, treballant amb el triangle rectangle  $\triangle APE$ ,  $\frac{AP}{AE} = \sin(\alpha)$ . De manera anàloga amb el triangle rectangle  $\triangle APD$ , obtenim que  $\frac{AD}{AP} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$ . És a dir:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{AD}{AE} \quad (4)$$

Finalment, substituint (4) en (3), obtenim el resultat buscat en l'apartat 1:  $\frac{PB}{PC} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE}$ .

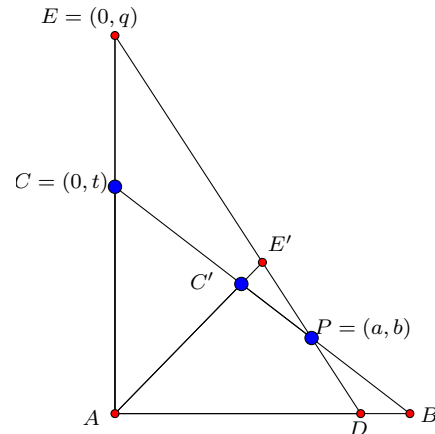
Vegem ara l'apartat 2 del problema. De fet, constatarem que la condició  $90^\circ$  no és necessària, ja que tobarem un contraexemple amb un triangle no rectangle. Per a aquest propòsit, analitzarem la configuració donada i en trobarem una de nova, que anomenarem  $\triangle ABC'$ , i que sense ser recte en  $\widehat{BAC'}$  complirà la condició desitjada.

Comencem a partir d'un triangle  $\triangle ABC$  que és recte en  $\widehat{BAC}$ . En coordenades,  $A = (0, 0)$

està situat a l'origen de coordenades,  $B$  sobre l'eix d'abscisses i  $C$  sobre l'eix d'ordenades. Escrivim  $P = (a, b)$   $a \neq 0$ , que està situat sobre el costat  $BC$ . Per tant, l'equació de la recta  $r_1$  que passa pels vèrtexs  $B$  i  $C$  és, per a determinat valor  $m$ ,  $y = mx + b - ma$ . La recta  $r_2$  perpendicular al segment  $AP$  i que passa per  $P$  tindrà una equació amb la forma següent:  $ax + by - (a^2 + b^2) = 0$ . Per abreviar les expressions fem  $q = \frac{a^2 + b^2}{b}$  i  $t = b - ma$ , amb els quals el punt  $C$  intersecció de  $r_1$  i l'eix d'ordenades serà  $C = (0, t)$  i el punt  $E$  intersecció de la recta  $r_2$  i l'eix d'ordenades serà  $E = (0, q)$ .

Sabem per l'apartat 1 que en el triangle rectangle  $\triangle ABC$  es compleix  $\frac{AD \cdot AB}{AC \cdot AE} = \frac{PB}{PC}$ . Considerem ara els punts  $C'$ , entre  $C$  i  $P$  i sobre el segment  $CP$ , i  $E'$  sobre la prolongació del segment  $AC'$  i sobre el segment  $PE$ , de tal manera que el triangle  $ABC'$ , sense ser rectangle, compleixi les condicions  $\frac{AD \cdot AB}{AC' \cdot AE'} = \frac{PB}{PC'}$ . Veurem que aquests punts existeixen.

De fet, la configuració a estudiar és la següent:



Denotem  $C' = (1 - \lambda)C + \lambda P = (\lambda a, (1 - \lambda)t + \lambda b)$  i  $E' = \mu C' = (1 - \gamma)E + \gamma P$ , amb  $\mu$  i  $\gamma$  que s'han de trobar.

Resolent el sistema d'equacions obtingut de fer  $\mu C' = (1 - \gamma)E + \gamma P$  obtenim que  $\mu \lambda a = \gamma a$  i  $\mu(t + \lambda(b - t)) = q + \gamma(b - q) = q + \mu \lambda(b - q)$ . Per tant, simplificant, en resulta que  $\mu \lambda = \gamma$  i  $\mu = \frac{q}{t + \lambda(q - t)}$ , amb la qual cosa:

$$E' = \mu C' = \frac{q}{t + \lambda(q - t)} (\lambda a, t + \lambda(b - t)).$$

A més, s'ha de complir la condició:  $\frac{AC' \cdot AE'}{PC} = \frac{AC \cdot AE}{PC}$ .



Desenvolupant les expressions per als valors de  $AC'$ ,  $AE'$  i  $PC'$  obtenim:

$$\frac{AC' \cdot AE'}{PC'} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + (t-b)^2}} \cdot \frac{(a^2 + (b-t)^2)\lambda^2 + 2t(b-t)\lambda + t^2}{(1-\lambda)(t + \lambda(q-t))}.$$

Per tant:

$$t = \frac{(a^2 + (b-t)^2)\lambda^2 + 2t(b-t)\lambda + t^2}{(1-\lambda)(t + \lambda(q-t))}.$$

Arribem, després d'un parell de passos, a l'equació següent de segon grau en la indeterminada  $\lambda$ :

$$((b+t)q - 2bt)\lambda^2 + t(2b-q)\lambda = 0.$$

Hi ha dues solucions: la solució  $\lambda = 0$ , corresponent a la ja coneguda del triangle rectangle, i l'altra que, després de canviar  $t$  i  $q$  per les seves expressions equivalents, ens dona:

$$\lambda = \frac{(a^2 - b^2)(b - ma)}{ma(b^2 - a^2) + 2a^2b}.$$

Per tant, això demostra que no cal que l'angle  $\widehat{BAC}$  sigui rectangle.

Com a exemple, podem particularitzar  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $m = -1$ , obtenim com a punts  $A = (0, 0)$ ,  $B = (3, 0)$ ,  $C = (0, 3)$ ,  $E = (0, 5)$ ,  $\lambda = \frac{9}{14}$ ,  $C' = (9/7, 12/7)$  i  $E' = (3/2, 2)$ . En aquesta situació, el triangle és, doncs,  $\triangle ABC'$ ; el costat del segment  $AC'$  mesura  $\frac{15}{7}$ , el costat del segment  $AB$  mesura 3 i el costat corresponent al segment  $BC'$  mesura  $\frac{12}{7}\sqrt{2}$ , que formen un triangle acutangle.

**A138.** (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.)

En un triangle isòsceles l'ortocentre està sobre la circumferència inscrita. Trobeu-ne l'àrea, tot sabent que és igual al perímetre.

**Solució:** (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Disseguem per  $I$ ,  $H$ ,  $R$  i  $r$  l'incentre, l'ortocentre, el radi de la circumferència circumscripita i el radi de la circumferència inscrita, respectivament, d'un triangle  $\triangle ABC$ . Denotem per  $A$ ,  $B$  i  $C$  els corresponents angles del triangle  $\triangle ABC$ . Amb aquesta notació, el quadrat de la distància entre  $I$  i  $H$  es pot escriure com

$$IH^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos(A) \cos(B) \cos(C) \quad (5)$$

Òbviament,  $H$  està sobre la circumferència inscrita si es compleix  $IH = r$ . Tenint present (5), aquesta condició s'escriu:

$$r^2 - 4R^2 \cos(A) \cos(B) \cos(C) = 0,$$

que és equivalent a:

$$\frac{r^2}{4R^2} = \cos(A) \cos(B) \cos(C).$$

Tenint ara present que  $\frac{r}{4R} = \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)$ , es té que

$$4 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) \sin^2\left(\frac{B}{2}\right) \sin^2\left(\frac{C}{2}\right) = \cos(A) \cos(B) \cos(C). \quad (6)$$

Per tant, la condició (6) s'ha de complir perquè l'ortocentre d'un triangle arbitrari  $\triangle ABC$  estigui sobre la circumferència inscrita.

D'ara endavant suposarem que  $\triangle ABC$  és isòsceles amb  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \varphi$ , on  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Aleshores,  $\widehat{BAC} = 180^\circ - 2\varphi$ , per tant,  $\frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^\circ - \varphi$ . Si substituïm aquests valors a (6) obtindrem:

$$4 \cos^2(\varphi) \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\cos(2\varphi) \cos^2(\varphi).$$

Atès que es compleix que  $\cos(\varphi) \neq 0$ , la igualtat anterior, dividida per  $\cos^2(\varphi)$ , serà la següent:

$$4 \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos(2\varphi) = 0.$$

Usant la fórmula trigonomètrica de l'angle doble, obtenim l'equació quadràtica a  $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  següent:

$$12 \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 8 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1 = 0,$$

que es pot escriure en la forma

$$\left(6 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1\right) \left(2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1\right) = 0,$$

i també (usant l'expressió del sinus de l'angle meitat) de la manera següent:

$$(2 - 3 \cos(\varphi)) \cos(\varphi) = 0.$$

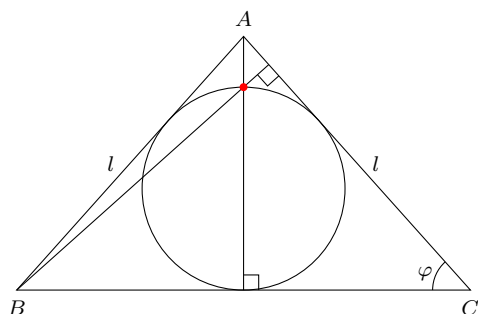
Com que  $\cos(\varphi) \neq 0$  en resulta, per tant:

$$\cos(\varphi) = \frac{2}{3}. \quad (7)$$

Suposem ara, a més, que l'àrea de  $\triangle ABC$  és igual al perímetre. Com que l'àrea d'un triangle és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen, podem expressar l'àrea de  $\triangle ABC$  en la forma

$$\frac{1}{2}l^2 \sin 2\varphi,$$

en la qual  $l = AB = AC$  (vegeu la figura)



Igualem, ara, aquesta expressió amb la del perímetre. Tindrem, per tant:

$$\frac{1}{2}l^2 \sin(2\varphi) = 2l + 2l \cos(\varphi).$$

D'aquí n'hem d'aïllar  $l$ :

$$l = \frac{4(1 + \cos(\varphi))}{\sin(2\varphi)}.$$

Substituint-ho a l'expressió de l'àrea i substituint també  $\cos(\varphi)$  per  $\frac{2}{3}$  i  $\sin(2\varphi)$  pel seu valor deduït de (7) ( $\sin(2\varphi) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ ), obtenim que l'àrea demanada és de  $10\sqrt{5}$  unitats quadrades.

**A139.** (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, BarcelonaTech, Barcelona.)

Siguin  $a_1, a_2, \dots, a_n$  els  $n$  nombres positius definits recursivament mitjançant  $a_1 = 2$  i  $a_{m+1} = a_m + (a_m - 1)^2$ ,  $m \geq 1$ . Demostreu que:

$$2 + \left( \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 < L_n L_{n+1}$$

en què  $L_n$  és l' $n$ -èsim nombre **Lucas**, definit per la recursió  $L_1 = 1, L_2 = 3$  i, per a tot  $n \geq 3$ ,  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ .

**Solució:** (Solució d'Esteve Casas, Institut Baix Montseny, Sant Celoni.)

Aplicarem el mètode d'inducció: els casos  $n = 1$  i  $n = 2$  són trivials. Suposem que la desigualtat és certa per a  $n$ , i veurem que també ho és per

a  $n + 1$ . Per tant, volem donar fites (en termes dels nombres de Lucas) de:

$$2 + \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 = 2 + \left( \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} + \frac{L_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}} \right)^2.$$

Usant la hipòtesis d'inducció, això ens porta a la desigualtat

$$\begin{aligned} 2 + \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 &< \\ &< L_n L_{n+1} + \frac{L_{n+1}^2}{a_{n+1}} + 2 \frac{L_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{\sqrt{a_k}}. \end{aligned}$$

Per tant, després de dividir per  $L_{n+1}$ , el que volem demostrar és que es compleix que:

$$L_n + \frac{L_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \leq L_{n+2}.$$

De manera equivalent, ja que  $L_{n+2} - L_n = L_{n+1}$ , la desigualtat anterior es tradueix en:

$$\frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \leq L_{n+1} \left( 1 - \frac{1}{a_{n+1}} \right). \quad (8)$$

Passarem a demostrar la desigualtat (8) per inducció. Novament, els casos  $n = 1$  i  $n = 2$  són trivials. Suposem que el resultat és cert per a  $n - 1$ , és a dir, que es compleix que:

$$\frac{2}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \leq L_n \left( 1 - \frac{1}{a_n} \right),$$

i veurem que el resultat també és cert per a  $n$ . L'anterior desigualtat implica la seqüència de desigualtats següent:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} + \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \frac{L_n}{\sqrt{a_n}} \\ &= \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}}} \frac{2}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} + \frac{2L_n}{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}} \\ &\leq \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}}} L_n \left( 1 - \frac{1}{a_n} \right) + \frac{2L_n}{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{a_n}{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}} L_n \left( 1 - \frac{1}{a_n} \right) + \frac{2L_n}{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}}} L_n (a_n + 1). \end{aligned}$$

Ara demostrarem, per tant, que es compleix ladesigualtat següent:

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} L_n (a_n + 1) \leq L_{n+1} \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Ara bé, la successió  $a_n$  és estrictament creixent i, per tant:

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{a_n}.$$

Així doncs, només cal demostrar que:

$$\frac{1}{a_n} L_n (a_n + 1) \leq L_{n+1} \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right),$$

que és equivalent a:

$$\frac{L_n}{a_n} + \frac{L_{n+1}}{a_{n+1}} \leq L_{n+1} - L_n = L_{n-1}.$$

Comprovem, doncs, que aquesta desigualtat és certa: si la  $n$  és més gran o igual que 3 tenim que  $a_n \geq 7$ , i per tant

$$\frac{L_n}{a_n} = \frac{L_{n-1} + L_{n-2}}{a_n} < \frac{2L_{n-1}}{7} < \frac{L_{n-1}}{2}.$$

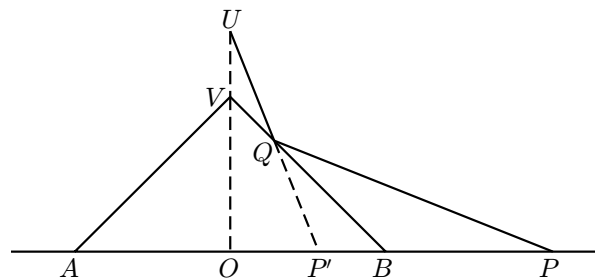
Pel que fa al terme  $\frac{L_{n+1}}{a_{n+1}}$ , es compleix que:

$$\frac{L_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{L_n + L_{n-1}}{a_n + (a_n - 1)^2} < \frac{2L_n}{2a_n} < \frac{L_{n-1}}{2}.$$

Així doncs, es constata que  $\frac{L_n}{a_n} + \frac{L_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{L_{n-1}}{2} + \frac{L_{n-1}}{2} = L_{n-1}$ , tal com volíem demostrar.

**A140.** (Proposat per Joan Girbau, IEC, Barcelona.)

Considerem un con circular de manera que l'angle en el vèrtex entre una generatriu qualsevol i l'eix del con sigui de  $45^\circ$  i que la superfície del con sigui un mirall. Prenguem com a unitat de mesura el radi de la circumferència de la base. Col·loquem aquest con sobre un pla, de manera que la seva base circular coincideixi amb una determinada circumferència  $c$  (de radi 1) d'aquest pla i situeu el vostre ull en un punt  $U$  molt a prop del vèrtex del con, mirant cap avall, en direcció perpendicular al pla (vegeu la figura).



El vostre ull veurà la regió exterior a  $c$  reflectida en el mirall i tindrà la sensació que la regió que veu és interior. Sigui  $\varepsilon$  la distància entre  $U$  i el vèrtex  $V$  del con. Sigui  $P$  un punt del pla exterior a la circumferència  $c$  i  $P'$  el punt on vosaltres el veureu. Siguin  $p$  i  $p'$  les distàncies respectives de  $P$  i de  $P'$  al centre  $O$  de la circumferència  $c$  de la base. Proveu que:

$$p' = \frac{1 + \varepsilon}{p + \varepsilon}.$$

Observeu que quan el vostre ull s'apropa al vèrtex del con (quan  $\varepsilon$  tendeix a zero) la transformació que fa el mirall s'apropa a una inversió respecte a la circumferència  $c$ .

**Solució:** (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

El teorema de Menelau, aplicat al triangle  $\triangle VOB$  i transversal  $UQP'$ , dona:

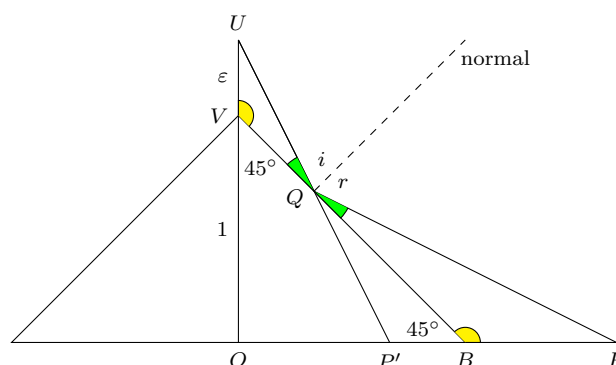
$$\frac{VU}{UO} \cdot \frac{OP'}{P'B} \cdot \frac{BQ}{QV} = 1.$$

És a dir,

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{p'}{1 - p'} \cdot \frac{BQ}{QV} = 1. \quad (9)$$

D'altra banda, de la igualtat dels angles  $i$  (incidència) i  $r$  (reflexió), se'n dedueix la dels seus complementaris (vegeu la figura):

$$\widehat{VQU} = \widehat{PQB}.$$



I atès que  $\widehat{UVQ} = \widehat{QBP}$  (ja que ambdós tenen el mateix angle suplementari ( $45^\circ$ )), els triangles  $\triangle UVQ$  i  $\triangle PBQ$  són semblants. En resulta que:

$$\frac{BQ}{QV} = \frac{BP}{UV} = \frac{p-1}{\varepsilon}$$

Igualant ara l'expressió de  $\frac{BQ}{QV}$  obtinguda de l'equació (9) amb la que acabem de trobar i multiplicant els dos membres per  $\varepsilon$ , tindrem:

$$\frac{(1+\varepsilon)(1-p')}{p'} = p-1.$$

D'aquí s'obté que  $p' = \frac{1+\varepsilon}{p+\varepsilon}$ , tal com es volia.

## Matemots

Xavier Gràcia

Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al número 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Matemàtic que refilava dins del paradís dels conjunts». La resposta és «Cantor»: «Ningú no ens podrà fer fora del paradís que Cantor ha creat», digué Hilbert sobre la teoria de conjunts. Cantor també és qui canta o refila.

Aquest número és una mica especial, ja que els enigmes no són estrictament de matemàtiques, sinó que estan vinculats a la **vida acadèmica** en general.

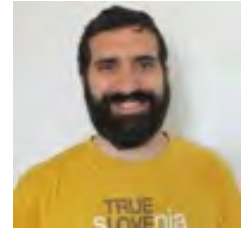
En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.<sup>2</sup>

1. Maldecaps per culpa de la llista d'exercicis (9 lletres).
2. Professor que apareix a la primera plana del diari (7 lletres).
3. Pot ser de teoria o de problemes, però la majoria és de la mitjana (6 lletres).
4. N'hi ha a les revistes, als currículums, i al codi penal (8 lletres).
5. Pot ser olímpic a Barcelona '92, central al PCUS, i organitzador en tots els congressos (6 lletres).
6. Assaig acadèmic que permet distingir una dona d'un home (6 lletres).
7. Explicà els seus problemes perquè li acceptessin l'article (6 lletres).
8. Material tèxtil d'ús obligat a les editorials de matemàtiques (5 lletres).

<sup>2</sup>

Respostes als Matemots: 5. comitè; 1. problemes; 8. Játex; 4. articles; 2. titular; 7. refer; 3. classe; 6. tesina.

- DAVID ROMERO I SÀNCHEZ va llegir la seva tesi, dirigida pel Dr. Lluís Alsedà i Soler, titulada *Numerical Computation of Invariant Objects with Wavelets*, el dia 5 de novembre de 2015. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



En certes classes de sistemes dinàmics, poden aparèixer conjunts invariants amb una geometria estranya. Per exemple, sota certes condicions en els paràmetres  $\sigma, \varepsilon \in \mathbb{R}$ , la iteració d'un *skew product* forçat quasi-periòdicament

$$\mathfrak{F}_{\sigma,\varepsilon}(\theta_n, x_n) = (R_\omega(\theta_n), F_{\sigma,\varepsilon}(\theta_n, x_n)),$$

on  $R_\omega(\theta) = \theta + \omega$ ,  $\omega \in \mathfrak{R} \setminus \Omega$  i  $F_{\sigma,\varepsilon}: \mathbb{S}^1 \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  és contínua i  $\mathcal{C}^1$  respecte a la segona variable pot portar a l'aparició d'atractors no caòtics estranys (ANCE).

Més concretament, l'estudi d'aquest tipus de sistemes es pot fer a través de l'anàlisi del comportament asimptòtic de la iteració de  $\mathfrak{F}_{\sigma,\varepsilon}$ . Una iteració que, sota certes condicions no gaire restrictives, pot acumular-se a la gràfica d'una funció mesurable  $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathfrak{R}$ ; *i.e.*, parelles de la forma  $\mathcal{K} = \{(\theta, \varphi(\theta)) : \theta \in \mathbb{S}^1\}$ . Més encara, quan  $\varphi$  satisfà l'equació d'invariància,  $F_{\sigma,\varepsilon}(\theta, \varphi(\theta)) - \varphi(R_\omega(\theta)) = 0$ , aleshores el *tor*  $\mathcal{K}$  és invariant pel sistema  $\mathfrak{F}_{\sigma,\varepsilon}$ . De fet, sota certes condicions abans esmentades,  $\varphi$  s'anul·la en un conjunt residual i és positiva en un conjunt de mesura de total (vegeu [1]). És a dir,  $\mathcal{K}$  té una geometria complicada. És en aquest cas que direm que  $\mathcal{K}$  és un ANCE. L'objectiu d'aquesta tesi és descriure com hom pot obtenir aproximacions d'aquestes funcions (i objectes), d'una manera ràpida i eficient, fent servir ondetes. És a dir, donada una ondeta  $\psi$ , busquem com calcular els *coefficients wavelet*  $d_{-j,n}$  per tal que

$$\varphi \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} d_{-j,n} \psi_{-j,n}^{\text{PER}}(\theta)$$

on  $\psi_{j,n}^{\text{PER}}(\theta)$  es defineix com:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{j,n}(x+l) = 2^{-j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi\left(\frac{(x+l) - 2^j n}{2^j}\right).$$

I és que per donar aproximacions d'aquests objectes les ondetes, per la seva adaptabilitat, semblen una eina més natural que les sèries de Fourier (vegeu [2]). Les ondetes que hem fet servir, per obtenir aproximacions numèriques semianalítiques de  $\varphi$ , són les de Daubechies i la de Haar (un cas particular de la família d'ondetes de Daubechies).

A més a més, tal com fa l'anàlisi Fourier, donada una funció  $f$  el decaïment dels *coefficients wavelet* associats a  $f$  també determinen la regularitat de la funció. És a dir, a partir de l'aproximació de  $\varphi$  obtinguda, es pot donar una estimació de la regularitat, en termes dels espais funcionals Besov o Sobolev, de  $\varphi$ . Precisament, l'estudi de la regularitat en funció dels paràmetres, pot oferir un altre punt de vista a les rutes vers la fractalització descrites a la literatura i que, a dia d'avui, encara no estan del tot clares.

Per assolir aquests objectius, primer hem traduït les *\mathfrak{R}*-wavelet de Daubechies a  $\mathbb{S}^1$  a fi de poder calcular, ràpidament i en qualsevol punt,  $\psi_{j,n}^{\text{PER}}(\theta)$ . Després, hem donat dues estratègies per obtenir els *coefficients wavelet* (els quals proporcionen l'aproximació desitjada i permeten oferir estimacions de la regularitat): fent servir la *Fast Wavelet Transform* i el mètode de Newton per resoldre l'equació d'invariància.

Com és ben sabut, per cada pas del mètode de Newton cal resoldre un sistema lineal d'equacions. Un sistema d'equacions que, per a les nostres necessitats, és de l'ordre de  $2^{26} \times 2^{26}$ . És precisament en aquest punt on ha calgut desenvolupar una estructura de dades que permeti guardar i operar amb unes matrius determinades associades a les ondetes. És més, en el cas de Haar, hem trobat una fórmula recursiva que dona la solució exacta del sistema lineal en  $\mathcal{O}(n)$ . Per a la resta de les ondetes de Daubechies, fent servir mètodes

de Krylov, també s'ha obtingut la solució del sistema lineal associat a cada pas de Newton (també en  $\mathcal{O}(n)$ ). Un cop fet això, hem resseguit a través d'una parametrització  $\varepsilon(\sigma)$  la regularitat de la funció invariant d'una família de *skew products* amb l'objectiu (aconseguit) de veure la creació d'un ANCE a través de la regularitat de  $\varphi$ .

- ABDÓ ROIG MARANGES va llegir la seva tesi, dirigida per Pere Pascual, titulada *Descent in Lawson homology and morphic cohomology*, el dia 26 de gener de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Tradicionalment quan un vol estudiar cicles algebraics en una varietat algebraica  $X$ , fa servir els grups de Chow  $\text{CH}_k(X)$  de  $k$ -cicles algebraics en  $X$ . Això és el grup lliure generat per les subvarietats irreductibles de dimensió  $k$ , mòdul de la relació d'equivalència que identifica dos cicles si es deformen algebraicament l'un sobre l'altre.

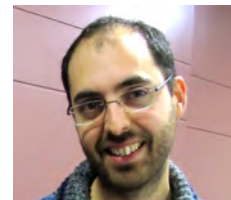
A principis dels anys noranta, Blaine Lawson i Eric Friedlander van desenvolupar un enfocament diferent per a l'estudi de cicles algebraics en varietats algebraiques complexes. En lloc de fer quocient del grup lliure de cicles per una relació d'equivalència, defineixen una topologia a l'espai de cicles algebraics  $Z_k(X)$ , i s'adonen que el tipus d'homotopia d'aquest espai és un invariant geomètric interessant de  $X$ . En particular, els grups de components conexas  $\pi_0 Z_k(X)$  recuperen els grups de Chow, mentre que els grups d'homotopia superior  $\pi_{n-2k} Z_k(X)$  ofereixen invariants noves, conegudes com a homologia de Lawson, que interpolen entre els grups de Chow i l'homologia singular  $H_n(X)$ .

En aquesta tesi contribuïm en diferents direccions a l'estudi de l'homologia de Lawson, juntament amb el d'una teoria cohomològica dual, anomenada cohomologia mòrfica, que fou proposada també per Friedlander i Lawson. És convenient estudiar aquestes dues teories en el context d'una teoria bivariant  $M_k(X, Y)$ , que generalitza la cohomologia mòrfica de  $X$  quan  $Y$  és un punt, i l'homologia de Lawson de  $Y$  quan  $X$  és un punt.

D'una banda, reformulem un teorema de descens de Guillén i Navarro, en el llenguatge

## Referències

- [1] Keller, Gerhard. «A note on strange nonchaotic attractors», *Fundamenta Mathematicae*, **151**(2) (1996), 139–148.
- [2] Mallat, Stéphane. «A wavelet tour of signal processing», *Academic Press Inc.*, (1998), XXIV+577.



de les  $\infty$ -categories, seguint els treballs de Joyal i particularment Lurie. La finalitat és obtenir una demostració diferent d'una variant del teorema d'extensió de Guillén i Navarro.

Amb aquest resultat, estudiem diverses variants de descens mitjançant l'homologia de Lawson i la cohomologia mòrfica. Definim un morfisme de Gysin refinat, estenent una construcció de Friedlander i Gabber, que ens permet demostrar una fórmula d'intersecció excendentària en homologia de Lawson, i la usem per obtenir una fórmula de *blow-up* per a una immersió regular de varietats. No assumim que les varietats siguin llises, i generalitzem resultats de Hu al cas singular.

Llavors recollim diverses propietats de descens per les dues teories semitopològiques que considerem. En particular, demostrem descens cdh per als complexos de cocicles bivariants respecte a la variable covariant  $Y$ . En canvi, no coneixem gran cosa sobre les propietats de descens en la variable contravariant  $X$  per al cas possiblement singular. Pel camí, demostrem un teorema de dualitat, relacionant complexos de cocicles algebraics, que amplia resultats de Friedlander i Lawson.

Finalment, estudiem un cas molt particular de descens per a la variable  $X$ : la cohomologia mòrfica de varietats tòriques. Les varietats tòriques són una classe de varietats racionals amb una descripció combinatoria explícita, que ens permet desenvolupar una successió espectral que calcula una variant de la cohomologia mòrfica de varietats tòriques de forma explícita. Aquest és un dels pocs càlculs d'aquest invariant per a una varietat singular.

- VICENÇ SALES I INGLÈS va llegir la seva tesi, dirigida per Francesc Carreras, titulada *Aportacions a l'estudi dels sistemes electorals*, el dia 28 de gener de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.



La creixent complexitat de les societats modernes ha comportat, entre altres coses, que acullin diversos col·lectius que poden enfrontar-se o cooperar segons els interessos dels membres que els formen. Això ha portat a aquests col·lectius a tenir la necessitat d'eleger alguns individus que els representin i que puguin prendre determinades decisions en nom seu. Els mecanismes encarregats de fer-ho s'anomenen «sistemes electorals». De fet, n'existeixen molts i són molt diferents. En el treball següent es presenten algunes idees per analitzar-los matemàticament.

En un primer capítol es fa una anàlisi global dels sistemes electorals. Comença amb la definició de sistema electoral —amb l'ajut de la teoria de les Probabilitats— i la introducció dels exemples bàsics per a una única circumscripció —anomenats «simples»— més importants que hi ha: els ordinals, els de quotes i els de divisors. Després es defineixen dues operacions —l'extensió mitjana i la suma— per als sistemes electorals que, aplicades als exemples anteriors, permeten la seva generalització al cas de diverses circumscripcions de dues formes diferents —els mitjans i els suma—. A continuació, s'introdueixen també algunes propietats importants que poden tenir els sistemes electorals: la superadditivitat —casos en què s'uneixen les candidatures per sortir guanyant—, la monotonia —casos en què més vots corresponen a un nombre igual o més gran de representants—, el creixement —quan en augmentar el nombre de representants per escollir, cada candidatura manté o augmenta el seu nombre de representants— i l'estabilitat —casos en què hi ha el límit del nombre relatiu de representants per a cada candidatura— i s'estudia quins dels exemples simples les tenen i el comportament d'aquestes propietats respecte de les operacions anteriorment definides, que permeten establir els resultats corresponents per a les dues generalitzacions anteriors. A més, en particular, l'estabilitat proporciona la possibilitat de definir els sistemes electorals majoritaris i proporcionals considerant casos

particulars de la seva definició.

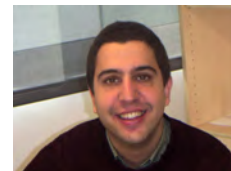
El segon capítol està dedicat a l'estudi dels sistemes electorals des del punt de vista individual. En aquest sentit, s'introdueixen les expectatives electorals —obtingudes fixant el vector de vots d'una candidatura arbitrària— i s'analitza la seva relació amb les operacions anteriorment definides. A continuació, s'introdueixen algunes propietats de tipus individual que els sistemes electorals poden tenir i s'estudia què succeeix quan es consideren les operacions anteriors. I s'acaba el capítol relacionant aquests resultats amb les propietats anàlogues de caràcter global introduïdes en el capítol anterior.

En el tercer capítol s'estableix un paràmetre per avaluar si una candidatura qualsevol resulta beneficiada o no per un sistema electoral. La forma de fer-ho és considerar l'esperança matemàtica de les expectatives electorals introduïdes en el segon capítol, i d'aquesta manera s'obté el concepte d'expectativa electoral mitjana. I, finalment, s'estudia novament el seu comportament respecte de les operacions i els exemples introduïts.

El quart capítol se centra en l'anàlisi de tres qüestions sobre jocs de majoria ponderada que s'utilitzen en el capítol següent: una altra forma equivalent de definir els jocs anteriors, una nova operació entre ells —la suma— i la convergència, aquesta en el marc general dels jocs cooperatius.

Finalment, en el cinquè capítol se substitueix el nombre de representants de cada candidatura pel seu índex de poder de Shapley-Shubik com a forma d'estudiar el poder real de les diferents candidatures i s'analitzen els sistemes electorals utilitzant aquest nou indicador. D'aquesta manera, s'obté el concepte de sistema de poder i, anàlogament, els d'expectativa de poder i d'expectativa de poder mitjana. Finalment, s'introdueixen algunes propietats noves sobre cadascun dels conceptes anteriors i s'analitza també la seva relació amb les propietats homònimes dels sistemes electorals definides en els tres primers capítols.

- JOSEP MARIA PUIGVERT GUTIÉRREZ va llegir la seva tesi, dirigida per Josep Fortiana Gregori, titulada *3-month Euribor expectations and uncertainty using option-implied probability densities*, el dia 1 de febrer de 2016. La tesi correspon al Departament de Lògica, Probabilitat i Estadística de la Universitat de Barcelona.



En aquesta tesi estudiem l'evolució dels tipus d'interès de mercat que és un dels components principals del mecanisme de transmissió de la política monetària. Els bancs centrals, els participants del mercat i els professionals de la política monetària recorren a la informació continguda en els preus financers per entendre millor l'evolució dels tipus d'interès de mercat. També és possible obtenir una avaluació completa i quantitativa d'aquestes característiques a través de les funcions de densitat de probabilitat (PDF, per les seves sigles en anglès) implícita en opcions, en particular quan s'apliquen a opcions sobre l'euríbor, la qual cosa constitueix un complement natural dels indicadors del mercat financer existents.

La literatura recull diversos mètodes per construir aquestes PDF implícites basades en opcions. En general, si bé els mètodes poden presentar diferències als extrems de les cues de la distribució, no s'observen diferències significatives a la secció central de les PDF implícites basades en opcions calculades. I, precisament, es pot afirmar que la secció central de les PDF implícites basades en opcions és la que pot ser més útil a efectes de la política monetària, al contrari del que passa amb l'anàlisi de l'estabilitat financera, que s'acostuma a fixar més en les cues de la distribució. Concretament, aquestes PDF implícites basades en opcions no s'han estudiat a fons durant períodes de crisi financera, que és precisament quan podrien resultar més útils.

En general, els mètodes que s'han emprat per construir i calcular densitats implícites són neutrals al risc. Per tant, són indiferents al comportament dels inversors i no inclouen el component de la prima de risc. Alguns autors ja han ampliat aquests mètodes, la qual cosa ha donat lloc a PDF implícites basades en opcions de condicions reals, que incorporen el comportament dels inversors i tenen en compte

el component de la prima de risc. No obstant això, hi ha molts pocs estudis que analitzin i comparin les diferències entre aquestes dues densitats en el mercat de l'euríbor i, en particular, en relació amb episodis de crisi o decisions de política monetària.

En recórrer a una tècnica no paramètrica, basada en la metodologia de Bliss i Panigirtzoglou, aquesta tesi presenta una anàlisi de PDF per als resultats de l'euríbor a tres mesos, a partir de PDF implícites basades en opcions neutrals al risc i de condicions reals. Una anàlisi d'aquestes característiques permet posar de manifest reaccions típiques dels mercats, que els bancs centrals podrien emprar com a complement de les eines que ja disposen per prendre decisions de política monetària. En la tesi es conclou que les PDF implícites en opcions representen una avaluació quantitativa per mesurar la transmissió de la política monetària, així com un complement natural de l'ampli ventall d'indicadors financers usats pels bancs centrals i els professionals de la política monetària. A més, es poden fer servir com una eina de fàcil accés per visualitzar la reacció del mercat a un fet concret. En particular, la rellevància de la nota i la conferència de premsa del Banc Central Europeu com a eina de comunicació queda corroborada per l'anàlisi dels moments de les PDF implícites en opcions a una freqüència superior.

Finalment, la transformació de les PDF neutrals al risc en PDF de condicions reals ens permet preveure els preus dels futurs de l'euríbor a tres mesos. A més, l'anàlisi de les densitats de preu d'estat indica que els inversors assignen preus més elevats a estats amb tipus alts i baixos en comparació amb el tipus al comptat esperat.

La tesi consta de tres articles que es van publicar en revistes internacionals arbitrades.



- RUBÉN BERENGUEL MONTORO va llegir la seva tesi, dirigida per Ernest Fontich i Núria Fagella, titulada *The parametrization method for invariant manifolds of tori in skew-product lattices and an entire transcendental family with a persistent siegel disk*, el dia 2 de febrer de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.



Aquesta tesi estudia dos problemes en la teoria dels sistemes dinàmics. Aquest enfocament inclou un ampli espectre de temes, però d'una manera o una altra implica l'estudi de l'evolució de punts sota l'acció d'una aplicació

$$x \mapsto F(x) \mapsto F(F(x)) \mapsto F(F(F(x))) \mapsto \dots$$

La pregunta més simple que podem fer-li a un sistema dinàmic és «quins punts són invariants»? Un cop obtenim una resposta podem passar a estudiar la dinàmica en un entorn concret. El cas més simple seria un punt fix

$$x_0 \mapsto F(x_0) = x_0.$$

En determinades condicions sobre la derivada de  $F$ , aquest té associades «varietats invariants». Per exemple, un punt fix «hiperbòlic»,  $x_0$ , té associades varietats estable  $W^s$  i inestable  $W^u$ . Un resultat fonamental en l'estudi dels sistemes dinàmics és el fet que, en certes condicions de no-degeneració, petites pertorbacions de  $F$  no afecten l'existència d'un punt fix proper a  $x_0$  amb varietats properes a  $W^s$  i  $W^u$ .

Hi ha moltes maneres de modelar sistemes dinàmics. Per exemple, el cervell es pot considerar un sistema dinàmic de bilions de variables (una per neurona), amb complexos lligams entre elles. O bé un conjunt de bilions de sistemes dinàmics simples (un per cada neurona) i un mecanisme per propagar interaccions. La generalització matemàtica és l'estudi de sistemes dinàmics en reticles infinits dimensionals.

A la primera part d'aquesta tesi estudiem sistemes dinàmics formats per un *skew-product* d'un reticle infinit i un tor, pertorbacions de sistemes desacoblats en els quals la projecció sobre el reticle té punts fixos hiperbòlics. Altrament, sistemes del tipus

$$(x, \theta) \mapsto (F(x, \theta), \theta + \omega), \quad x \in \ell^\infty(\mathbb{R}^n), \theta \in \mathbb{T}^d,$$

que són pertorbacions de sistemes amb  $\{0\} \times \mathbb{T}^d$  com a tor hiperbòlic invariant. La interacció

entre nodes està controlada a través d'una «funció de decaïment», que assegura que com més llunyà és un node, més petita és la seva influència.

Emprem el «mètode de la parametrització» per estudiar la persistència del tor invariant i les seves varietats invariants sota pertorbació. Aquest mètode permet estudiar-ne les propietats de decaïment i obtenir resultats fins de regularitat.

Després de provar resultats preliminars sobre espais de funcions i resultats espectrals, determinem la regularitat i el decaïment del tor en el sistema pertorbat usant un teorema de punt fix adaptat per regularitat baixa. Determinem la part lineal de la dinàmica local de les varietats invariants i els termes d'ordre superior en varietats fortament estables passant a forma triangular i usant un teorema de punt fix en espais amb normes adaptades, també provem resultats de diferenciabilitat fins. Finalment, acabem la parametrització de varietats no ressonants usant diverses tècniques. Per acabar, provem resultats sobre formes normals i teoremes de Sternberg en reticles en decaïment.

A la segona part d'aquesta tesi estudiem dinàmica 1-dimensional, en concret dinàmica holomorfa. El seu origen es pot traçar a la pregunta: «quan convergeix el mètode de Newton per a polinomis complexos»? Fixem-nos que té dos vessants, «per a quins punts» i «per a quins polinomis». Aquesta dicotomia és freqüent quan considerem sistemes dinàmics que depenen de paràmetres: podem considerar el pla dinàmic «per a un paràmetre específic» (on trobem conjunts invariants: els conjunts de Julia i Fatou) o bé «propietats generals d'un conjunt de paràmetres» en el pla de paràmetres.

Podem descompondre el conjunt de Fatou en components obertes, en funció del comportament de les òrbites. Cal destacar que cada component té, doncs, associada una singularitat: com més singularitats, més (possibles)

components de Fatou. Recordem que les funcions holomorfs tenen dos tipus de singularitats: punts crítics i valors asimptòtics.

En el pla de paràmetres les components són més difícils de catalogar i estudiar, en general són formades per paràmetres amb propietats similars. Per exemple, paràmetres amb una òrbita atractora d'un cert període poden formar una component (potser oberta) en el pla de paràmetres.

Les famílies més simples són, per tant, la quadràtica i l'exponencial. Aquestes dues famílies tenen un paper fonamental en l'estudi de sistemes dinàmics holomorfs més complexos.

Un pas natural és estudiar famílies amb una component de Fatou persistent: un dels valors singulars sempre hi està associat. Per exemple, una funció amb un disc de Siegel al voltant del

zero, un valor crític i un valor asimptòtic. Això és, donat  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ :

$$f_a(z) = \lambda a(e^{z/a}(z+1-a) - 1 + a), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Observem que aquesta família inclou com a casos extrems l'exponencial  $u \mapsto \lambda(e^u - 1)$  quan  $a \rightarrow 0$ , una funció *polynomial-like* de grau 2 quan  $a \rightarrow \infty$  i  $u \mapsto \lambda u e^u$  quan  $a = 1$ .

Provem la unicitat d'aquesta família i n'estudiem la dinàmica. També descrivim i parametrizem components obertes del pla de paràmetres. Demostrem diversos resultats topològics sobre aquestes components i sobre les fronteres dels discos de Siegel per a certs paràmetres rellevants. Finalment, demostrem un resultat que permet generar imatges de conjunts de bifurcació per a famílies que depenen d'un paràmetre.

- JOAN NUALART RIERA va llegir la seva tesi, dirigida per Artur Travesa Grau, titulada *On the hyperbolic uniformization of Shimura curves with an Atkin-Lehner quotient of genus 0*, el dia 3 de febrer de 2016. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.



L'objectiu principal de la tesi és contribuir a l'estudi de la uniformització hiperbòlica explícita de les corbes de Shimura des d'un punt de vista clàssic. Per a això acotem l'estudi a les corbes associades a ordres d'Eichler dins d'àlgebres de quaternions racionals i no escindides de manera que el quocient pel seu grup d'involucions d'Atkin-Lehner és de gènere 0, ja que malgrat les nombroses diferències també presenta certes similituds amb el cas modular clàssic. Utilitzem aquest fenomen per discutir una aproximació al problema de l'obtenció d'uniformitzacions hiperbòliques explícites d'aquestes corbes i d'alguns recobriments, així com també algunes aplicacions.

En primer lloc, comencem per introduir i estudiar algunes de les eines i els objectes que necessitarem. Per fer-ho, considerem la generalització natural de les equacions modulars al nostre context de corbes de Shimura, que dona lloc al que anomenem «polinomis kroneckerians». Aquests polinomis ens donen equacions per a certes corbes que són recobriments d'un quocient d'Atkin-Lehner de gènere 0 d'una

corba de Shimura. En segon lloc, n'estudiem algunes de les propietats: cos de definició, singularitats, etcètera. També demostrem, com en el cas clàssic, que a partir del coneixement d'alguns d'aquests polinomis podem determinar explícitament alguns punts de multiplicació complexa de la corba. Finalment, estudiem més a fons aquests polinomis en el cas de les corbes de Shimura de gènere 0.

D'altra banda, introduïm també desenvolupaments de funcions i formes automorfes associades a corbes de Shimura al voltant de punts de multiplicació complexa i presentem un mètode per calcular-los utilitzant els polinomis kroneckerians. En particular, això ens permet obtenir una uniformització explícita de la corba de Shimura associada a un ordre maximal en l'àlgebra de quaternions racional de discriminant 22. A continuació, ens interessem per la interpretació modular de la corba de Shimura, determinem l'expressió de la uniformització trobada en termes d'invariants d'Igusa i elaborarem una descripció explícita de les superfícies abelianes que corresponen als punts de la corba.

Finalment, calculem la llista de les 271 corbes per a les quals podríem seguir el mètode aplicat a la corba de discriminant 22 per obtenir-ne una uniformització explícita, almenys des d'un punt de vista teòric. Un total de 186 corbes d'aquesta llista són recobriments d'altres corbes de la llista i per aquest motiu estudiem com obtenir de manera computacionalment més eficaç la uniformització d'aquestes 186 a partir de la resta. També aportem diversos exemples d'uniformitzacions en aquesta situació.

Tot seguit, estudiem les propietats aritmètiques dels coeficients normalitzats dels desenvolupaments de funcions i formes automorfes al voltant dels punts de multiplicació complexa que s'han introduït amb anterioritat. En particular, exposem una caracterització

del cos de definició d'una forma o funció a través del cos que generen els seus coeficients al voltant de certs punts de multiplicació complexa. També oferim una descripció de l'acció del grup de Galois en tots els coeficients, de la mateixa manera que la llei de reciprocitat de Shimura descriu l'acció en el coeficient de grau 0.

Per acabar, considerem algunes aplicacions computacionals. Així, per exemple, s'estudia el càlcul de polinomis kroneckerians, el càlcul explícit de desenvolupaments de funcions i formes automorfes al voltant de punts de multiplicació complexa arbitraris i la determinació dels punts de multiplicació complexa racionals o quadràtics en un quocient de gènere 0 d'una corba de Shimura. Totes aquestes construccions s'il·lustren amb diversos exemples.

- M. JOSÉ JIMÉNEZ JIMÉNEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Andrés M. Encinas Bachiller, titulada *Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden y su aplicación al Análisis Matricial*, el dia 4 de febrer de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Les equacions en diferències tenen un paper important en diversos problemes científics i d'enginyeria. No obstant això, mentre que l'expressió de les solucions quan els coeficients de les equacions són constants és àmpliament coneguda, no passa el mateix per a coeficients variables, excepte en el cas més simple de les equacions de primer ordre.

En aquest treball presentem un estudi exhaustiu de les equacions en diferències lineals de segon ordre, en els casos infinit, semiinfinit i finit. A més, per a les equacions en diferències de segon ordre en el cas finit, estudiem els problemes de contorn associats. El nostre objectiu ha estat desenvolupar tècniques que siguin anàlogues a aquelles que es fan servir en l'anàlisi de les equacions diferencials i, per al cas finit, les utilitzades en problemes de contorn.

Tot i que les nostres tècniques, amb les modificacions convenientes, també s'ajusten al cas complex, tractem principalment el cas real, és a dir, el cas en el qual totes les funcions involucrades prenen valors en el cos dels nombres reals. Primer de tot, estudiem el cas de coeficients constants, començant pels resultats coneguts, per acabar descrivint les múltiples

relacions de les equacions en diferències de segon ordre amb coeficients constants amb els polinomis de Chebyshev. Aquestes relacions ens permeten calcular-ne les solucions de forma més directa i senzilla, sense necessitat d'imposar condicions sobre els valors dels coeficients de l'equació.

Un avantatge afegit de resoldre les equacions amb coeficients constants utilitzant la seva relació amb els polinomis de Chebyshev és que es pot aplicar la mateixa estratègia a les equacions amb coeficients variables, que fa possible expressar també les seves solucions en termes de les funcions de Chebyshev de dos arguments. D'aquesta manera, aconseguim una fórmula tancada i de càlcul directe per a les solucions de les equacions en diferències lineals de segon ordre amb coeficients variables.

En el cas particular d'equacions en diferències lineals de segon ordre amb coeficients variables que satisfan propietats de periodicitat, vam desenvolupar un procediment que redueix l'equació en diferències amb aquesta classe de coeficients a una altra equació del mateix tipus però de coeficients constants, de

manera que es poden tornar a expressar les seves solucions en termes de polinomis de Chebyshev. A més, la relació entre aquests polinomis i les equacions en diferències amb coeficients periòdics també es pot utilitzar per caracteritzar l'existència de solucions periòdiques, a fi de plantejar la teoria de Floquet corresponent a aquestes equacions discretes.

Atesa l'estreta relació entre les equacions en diferències de segon ordre en el cas finit i la inversió de matrius tridiagonals, finalment presentem l'aplicació dels resultats abans esmen-

tats per determinar la invertibilitat d'aquestes matrius i, en aquest cas, obtenir explícitament la seva inversa. Concretament, apliquem la teoria de problemes de contorn desenvolupada per a equacions en diferències lineals de segon ordre i les fórmules tancades per al càlcul de les seves solucions per obtenir les condicions d'invertibilitat i l'expressió explícita de la inversa de les matrius de Jacobi, de les matrius Jacobi  $(p, r)$ -Toeplitz (matrius tridiagonals amb coeficients que satisfan propietats de periodicitat) i d'algunes matrius circulants.

- BIN LI va llegir la seva tesi, dirigida per Marino Arroyo Balaguer, titulada *The variational approach to brittle fracture in materials with anisotropic surface energy in thin sheets*, el dia 9 de febrer de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.



La mecànica de fractura fràgil s'ha centrat en materials tridimensionals amb una energia de superfície isotròpica. En aquesta situació, els diferents principis per seleccionar el camí de la fissura són molt similars o fins i tot equivalents. La situació és radicalment oposada quan es considera la propagació de fissures en mitjans amb energia de superfície anisòtropa. Aquests materials són importants en aplicacions que involucren materials cristal·lins, polímers extrudits o materials orgànics i geològics. Quan l'anisotropia és forta, el fenomen de la propagació de fissures és molt ric, amb direccions de propagació prohibides o patrons de ruptura complexos en forma de dents de serra. Per tant, aquesta situació planteja qüestions fonamentals en la mecànica de la fractura, com ara els principis de selecció de la direcció de propagació de la fractura. Igualment, el procés d'esquinçat de làmines primes i fràgils, comuns a la natura, la tecnologia i la vida diària, desafia el nostre coneixement de la fractura. Atès que l'esquinçat d'aquestes làmines involucra típicament grans no linealitats geomètriques, no queda clar si els factors d'intensitat d'esforços són vàlids i, si això darrer és cert, com determina la propagació de fissures. La interacció entre la geometria, les deformacions i la curvatura dóna lloc a comportaments complexos, fet que restringeix les solucions analítiques aproximades a exemples molt simplificats i a règims de paràmetres limitats.

En totes dues situacions, s'han pogut interpretar experiments no trivials amb models energètics simples. No obstant això, no s'ha aprofundit en models generals de fractura en presència d'energia de superfície marcadament anisòtropa o en làmines primes, totes dues interessants per la seva capacitat d'explorar nova física. L'èxit esmentat dels models energètics simplificats suggereix que les teories variacionals de fractura en mitjans fràgils poden proporcionar un marc unificador per considerar situacions més generals, com les que es consideren en aquest treball.

Per caracteritzar la fractura en materials amb energia de superfície fortament anisòtropa, proposem un model variacional de camp de fase basat en el model de Cahn-Hilliard. Els models de camp de fase coneguts per a la fractura anisòtropa es van formular en un context que només admet anisotropia feble. En aquest treball, vam desplegar numèricament el nostre model de camp de fase d'alt ordre amb aproximacions locals de màxima entropia en un mètode directe de Galerkin. Els resultats numèrics mostren totes les característiques de fractura amb anisotropia forta, i reproduïxen sorprenentment bé les últimes observacions experimentals. Per explorar l'esquinçat de làmines primes, vam desenvolupar un model geomètricament exacte i un esquema computacional que acobla l'elasticitat (estirament i flexió), la fractura i l'adhesió a un substrat.

Despleguem numèricament el model amb elements finits basats en superfícies de subdivisió. Les nostres simulacions reproduïxen els patrons de ruptura, tant qualitativament com quantitativament, observats en els experiments d'esquinçat.

Finalment, examinem com la geometria de la làmina afecta la fractura. Com s'ha suggerit en resultats anteriors, i en les nostres pròpies simulacions de camp de fase, la forma de la làmina afecta dramàticament l'evolució de

fissures i la resistència efectiva del material. Per comprendre millor aquests fenòmens i amb l'objectiu de desenvolupar nous conceptes per a l'optimització del disseny d'estructures de làmines primes, derivem la força de configuració conjugada a l'extensió de la fractura per a la teoria lineal de làmines primes de Koiter. Identifiquem les contribucions conservatives en aquesta força a través del tensor d'Eshelby, així com les contribucions no conservatives que apareixen per l'efecte de la curvatura.

- NINA ASADIPOUR va llegir la seva tesi, dirigida per José Javier Muñoz, titulada *Rheological models for tissue relaxation and fluidisation*, el dia 4 de març de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Els teixits actius mostren un comportament porós i elàstic, de reblaniment, enduriment i fluïdització reversible. El resultat d'aquest comportament no lineal es deu als múltiples processos que tenen lloc a diferents escales. L'objectiu principal d'aquesta tesi és entendre les propietats mecàniques dels teixits tous en estar sotmesos a un procés de fluïdització i relaxació. Per aconseguir aquest objectiu, es desenvolupa una teoria matemàtica i uns mètodes de simulació que reproduïxen les observacions experimentals.

Es presenta un model basat en la cèl·lula per a la simulació de teixits multicel·lulars tous que té en compte els processos actius en el citoesquelet, i permet la reorganització i intercalació activa i passiva entre cèl·lules. En aquest model, cada cèl·lula es considera una entitat discreta a la qual les cèl·lules adjacents es connecten mitjançant elements que contenen les propietats reològiques de la interacció cel·lular. La connectivitat entre cèl·lules es determina mitjançant una triangulació de Delaunay dels nuclis dels centres cel·lulars. Es recorre a una teselació de Voronoi i a una altra teselació en què s'utilitzen els baricentres de la triangulació per representar els dominis de les cèl·lules.

Es desenvolupa un element de barra viscoelàstic que pot incorporar múltiples lleis reològiques amb models elàstics i viscosos no lineals. L'element es construeix a partir de

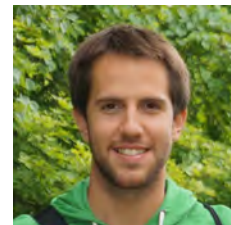
la unió en sèrie d'elements elàstics i viscosos, restringint la posició del node intern en estar a l'eix de la barra, i recorrent a la condensació estàtica dels graus de llibertat interns. A més, es desenvolupa un nou model reològic basat en els canvis dinàmics de la longitud de repòs que mimetitzava la resposta viscoelàstica.

S'ha observat experimentalment que les cèl·lules mostren un procés de fluïdització quan estan subjectes a un estirament transitori, i que recuperen les seves propietats mecàniques en desaparèixer la deformació imposada. Aquest procés de fluïdització es caracteritza per una reducció del mòdul de rigidesa elàstica (*stored modulus*) i un increment de l'angle de fase. Es proposa un model reològic que permet reproduir aquesta resposta mecànica combinada. El model es descriu en el context del medi continu i adaptat al sistema de partícules centrat en les cèl·lules que simula la interacció intercel·lular. L'equilibri mecànic s'acobla amb dues lleis d'evolució: una per a la configuració de referència i una altra per a la porositat o densitat polimèrica. La primera llei depèn de la deformació elàstica del teixit, mentre que la segona assumeix diferents velocitats de deformació durant l'increment i decrement de la porositat. La teoria s'implementa en el model de partícules i se li aplica una simulació numèrica. Els resultats s'ajusten a les mesures experimentals per a diferents valors de l'allargament màxim. La llei reològica també s'utilitza per simular la

relaxació de tensions d'una monocapa creada en suspensió i subjecta a una deformació constant. El model numèric s'aplica a diferents branques per reproduir la resposta amb diferents temps característics.

Mitjançant l'ús de triangulacions de Delaunay i teselacions de Voronoi, el model presentat en aquesta tesi obre la possibilitat de combinar diferents lleis reològiques en regions del citoesquelet i del còrtex cel·lular.

- CARLOS DOMINGO SALAZAR va llegir la seva tesi, dirigida per M. J. Carro, titulada *Endpoint estimates via extrapolation theory*, el dia 7 d'abril de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.



En anàlisi harmònica, la pregunta de si un operador està acotat a  $L^p$  sorgeix de manera natural en molts problemes. Recordeu que, donat un espai de mesura  $(X, \mu)$  i  $1 \leq p < \infty$ , els espais  $L^p(X, \mu)$  estan formats per aquelles funcions  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  tals que

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

Així doncs, la pregunta que ens plantejem per a un operador fixat  $T$  és si porta l'espai  $L^p$  en si mateix de manera contínua. Sovint això es pot respondre de manera positiva en el cas  $1 < p < \infty$ , però per a  $p = 1$  acostumen a sorgir problemes. Poseu, per exemple, l'operador maximal de Hardy-Littlewood, que donada una funció  $f$  a  $\mathbb{R}^n$  està definit com

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy,$$

on el suprem es pren sobre les boles  $B$  que contenen  $x$ . A  $\mathbb{R}^n$  amb la mesura de Lebesgue, aquest operador està acotat

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

quan  $1 < p < \infty$ , però en canvi, en el cas  $p = 1$ , això falla completament. De fet, ni tan sols tenim  $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$  a menys que  $f \equiv 0$ . És per això que per l'extrem  $p = 1$  de seguida observem que cal construir un espai més gran  $L^{1,\infty}$ , anomenat « $L^1$ -dèbil», i pel qual ja podem afirmar que

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

El fil conductor d'aquesta tesi és l'anomenada «teoria d'extrapolació», que en termes generals, pretén obtenir informació sobre l'acotació d'un

operador a l'extrem  $p = 1$  a partir d'informació sobre els casos  $p > 1$  (en principi, més senzills). A més, considerem mesures a  $\mathbb{R}^n$  determinades per a un pes, és a dir, on  $d\mu(x) = w(x)dx$  per a una certa funció  $w > 0$  localment integrable.

El primer objectiu que ens proposem és millorar la teoria de tipus Rubio de Francia orientada a obtenir estimacions a l'extrem. La teoria clàssica afirmava que si per a un cert  $1 \leq p_0 < \infty$  i tot pes  $w$  d'una certa classe anomenada « $A_{p_0}$ » podies provar  $T : L^{p_0}(w) \rightarrow L^{p_0}(w)$ , aleshores tenies el mateix per a tot  $1 < p < \infty$  i tot pes d' $A_p$ . Aquesta extrapolació, per exemple, ens permet reduir l'estudi d'acotacions sobre  $L^p(w)$  amb  $1 < p < \infty$  i  $w \in A_p$  a l'espai de Hilbert  $L^2(w)$  amb pesos  $w \in A_2$ , però té la limitació que no ens diu res sobre el cas  $p = 1$ . Recentment, un treball de M. J. Carro, L. Grafakos i J. Soria demostra que es pot definir una classe de pesos més gran,  $\hat{A}_p$ , amb la qual podem extrapolat d'una certa manera fins a  $p = 1$ . En el primer capítol de la tesi, presentem un resultat d'extrapolació que permet debilitar les hipòtesis d'aquesta nova extrapolació i mantenir la conclusió a l'extrem  $p = 1$ . En els capítols 2, 3 i 4 s'exposen un seguit d'aplicacions que treuen suc d'aquest resultat, primer fent-lo servir sobre l'operador de Bochner-Riesz a l'índex crític, i després sobre multiplicadors de Fourier i funcions *square* que apareixen a la teoria de Littlewood-Paley.

El segon objectiu gira a l'entorn de la teoria d'extrapolació de tipus Yano. En aquest cas, en lloc de fixar un nivell  $p_0 > 1$  i provar una acotació per a una classe de mesures (pesos  $A_{p_0}$ ), el que fem és fixar una mesura  $\mu$  i provar l'acotació per a tot  $p \in (1, 1 + \varepsilon)$ . Aleshores,

en funció de com es comporta la constant d'acotació associada  $C_p$  quan  $p \rightarrow 1^+$ , podem treure millors o pitjors conclusions d'acotació «a prop» de l'espai  $L^1(\mu)$ . En el capítol 5 plantegem com podem barrejar aquesta teoria amb la dels primers capítols per tal de millorar encara més les conclusions a l'extrem dels

operadors amb què treballàvem. Finalment, també fem una extensió de la teoria de Yano als espais de Lorentz i estudiem com es poden aprofitar aquestes tècniques per obtenir cotes puntuals per a operadors de tipus integral

$$T_K f(x) = \int_0^\infty K(x, t) f(t) dt.$$

- FELIP MIRALLES va llegir la seva tesi, dirigida per Petia Radeva, titulada *Telemonitoratge contextual de la qualitat de vida per un nou paradigma de salut*, el dia 22 d'abril de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.



Els nostres sistemes de salut estan veient qüestionada la seva sostenibilitat arran del canvi demogràfic d'una societat en la qual augmenta la prevalença de cronicitat i discapacitat. El nou model de salut es basa en la medicina 4P: la medicina preventiva, predictiva, personalitzada i participativa necessita nous serveis habilitats per a les TIC. Una tecnologia clau per a la medicina 4P és el telemonitoratge, és a dir, les TIC per conèixer l'estat de salut d'un pacient a distància i prendre decisions 4P. Una nova generació d'eines de telemonitoratge facilita la prescripció i els seguiments terapèutics sobre les estratègies principals de gestió de la cronicitat.

Un repte més ampli i ambiciós que abordem en aquesta tesi és el telemonitoratge de la qualitat de vida basat en el coneixement del context. Proposem una metodologia formal per avaluar la qualitat de vida mitjançant la categorització de dades d'entrada, la definició de dades de sortida i l'exploració de metodologies de fusió de dades. Hem dissenyat i desenvolupat un sistema de telemonitoratge i suport domiciliari (TMHSS) que desplega aquesta metodologia, integrat al nou sistema BackHome per un cas d'ús concret, el de persones amb discapacitats severes que utilitzen interfícies cervell ordinador (BCI) a casa seva com a tecnologia assistencial. Hem aplicat disseny centrat en l'usuari amb la finalitat de traslladar els BCI des del laboratori fins a l'ús domèstic independent, i aquest procés ha esdevingut el principal fil conductor de la recerca.

Mitjançant la implicació total dels usuaris finals (persones discapacitades, cuidadors no experts i terapeutes) en totes les fases del desen-

volupament, el sistema BackHome ha assolit cinc innovacions fonamentals que han avançat l'estat de l'art:

- una arquitectura modular i distribuïda que satisfà els requisits d'un BCI multifuncional i amb suport remot;
- un nou equipament de BCI amb elèctrodes pràctics que fixa un nou estàndard de lleugeresa, autonomia, comoditat i fiabilitat;
- un programari fàcil d'utilitzar i adaptat a les necessitats dels usuaris per fer servir un ventall complet d'aplicacions d'autonomia física i social a través del comandament amb un sol clic i l'ús adaptatiu;
- un sistema de telemonitoratge i suport domiciliari per fer efectiu l'ús independent dels BCI a la llar mitjançant monitoratge i assistència remota de l'ús del BCI, i
- una estació del terapeuta basada en web que ofereix serveis remots per planificar i monitorar rehabilitació cognitiva basada en BCI i per avaluar a distància la qualitat de vida de l'usuari final a la seva llar, així com per proporcionar suport remot a l'ús del sistema BCI per part de l'usuari.

Hem avaluat el sistema BackHome amb usuaris finals a casa seva, aprenent de la perspectiva de terapeutes i cuidadors no experts amb resultats que mostren bona acceptació del sistema pels usuaris, bons nivells d'usabilitat, alta satisfacció dels usuaris i suficients nivells de

control que demostren que el BCI es pot considerar per primer cop una tecnologia assistencial alternativa.

En un món molt més capacitat que mai per a les tecnologies digitals, les persones que viuen amb discapacitats físiques i cognitives lluiten per exercir la seva autonomia i independència a casa seva i més enllà. El sistema BackHome i els serveis que permet oferir significa una contribució significativa, per a les persones que ho necessiten, de millora de les seves oportunitats d'inclusió física i social i la seva assistència efectiva. De fet, mitjançant la provisió d'elèctrodes més pràctics, programari més fàcil d'utilitzar i millors eines de suport a la llar, BackHome ja permet l'ús domèstic independent de la tecnologia BCI.

Amb BackHome hem integrat un TMHSS amb un BCI multifuncional, i hem obert nous camins que permeten la comunicació remota entre terapeutes i usuaris per millorar el suport a distància.

De primeres, hem emprat el motor de monitoratge intel·ligent del TMHSS per desplegar i validar mètodes de reconeixement d'activitats i hàbits dels usuaris a partir de l'anàlisi de dades de sensors en ambients propicis als errors. Hem introduït una aproximació jeràrquica nova i efectiva amb la qual hem millorat la precisió dels classificadors per detectar, per exemple, si l'usuari és a casa o fora, o si ha rebut una visita a casa seva o no, en entorns inestables, complexos i sorollosos.

De segones, hem emprat també el TMHSS de BackHome per desplegar i validar una prova de concepte de l'avaluació de la qualitat de vida basada en informació del context que incorpora la metodologia proposada. Els resultats mostren precisions prometedores en l'avaluació d'elements com ara mobilitat, son o estat d'ànim, a partir de les mesures i la fusió de dades d'activitats de l'usuari prèviament detectades. Finalment, hem desplegat i provat el sistema BackHome amb el seu TMHSS durant sis setmanes a les llars d'usuaris finals amb discapacitat per a la recopilació i anàlisi

contínua de dades. Hem pogut assolir un nombre limitat d'usuaris finals en els experiments finals per l'alt cost de l'equipament, sobretot el BCI, i gràcies a les particularitats del tipus d'usuari. Tanmateix, les conclusions són molt satisfactòries, tant per demostrar la bona acceptació dels usuaris d'una tecnologia complexa en entorns reals, com per la prova conceptual del potencial de la metodologia i tecnologia per avaluar de manera remota hàbits, activitats i qualitat de vida.

L'avaluació del benestar general i l'estat de salut d'una persona a partir del processament de dades de sensors ambientals i personals no intrusius serà de gran interès per a professionals i gestors de salut i també per als ciutadans que estan cridats a coproduir i liderar un nou model de salut. Encara que la metodologia proposada pel telemonitoratge contextual de la qualitat de vida necessita d'una important feina futura i que aquesta aproximació tan ambiciosa encara està lluny de poder ser aplicada directament en la pràctica clínica real, hem estudiat de quina manera les solucions proposades poden arribar en un període de temps més curt i en una perspectiva més àmplia oferir millor assistència i suport a persones que ho necessitin.

Alguns dels components del sistema BackHome (específicament, el TMHSS) tenen el potencial de proveir serveis de teleassistència avançada, gestió de la cronicitat, promoció d'hàbits saludables i participació social a gent gran, pacients crònics, i discapacitats no necessàriament usuaris del BCI com a tecnologia assistencial. Hem apuntat quins requeriments han d'acomplir aquests serveis per fer el seu camí al mercat i a la pràctica clínica real. La identificació d'aquests resultats derivats ens ha permès aprendre una bonica lliçó de com la recerca en un cas d'ús complex que requeria coneixement multidisciplinari ha obert el camí a solucions innovadores més senzilles que arribaran més fàcilment a mercat i ajudaran a retornar la inversió feta en recerca i desenvolupament.



- DAVID BACHILLER PÉREZ va llegir la seva tesi, dirigida per Ferran Cedó Giné, titulada *Study of the algebraic structure of left braces and the Yang-Baxter equation*, el dia 27 de maig de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



L'objecte principal d'aquesta tesi és una estructura algebraica definida recentment anomenada «braça per l'esquerra no commutativa». Una braça per l'esquerra no commutativa és un conjunt  $B$  amb dues operacions,  $\star$  i  $\cdot$ , tals que  $(B, \star)$  i  $(B, \cdot)$  són grups, i que per a tot  $a, b, c \in B$  compleixen  $a \cdot (b \star c) = (a \cdot b) \star a \star (a \cdot c)$ . La motivació principal per estudiar aquests objectes és la relació que tenen amb un cert tipus de solucions de l'equació de Yang-Baxter, les solucions conjuntistes no degenerades. Aquesta equació ha estat clau tant en física teòrica (mecànica estadística) com en àlgebra (àlgebres de Hopf, grups quàntics).

Per començar, als capítols 2 i 3 de la tesi, presentem un mètode per construir totes les solucions conjuntistes no degenerades associades a una braça per l'esquerra no commutativa donada. És a dir, abans ja sabíem que cada solució té associada una braça, però, a més, ara sabem com recuperar les solucions si inicialment tenim una braça donada. Per tant, això redueix el problema de la classificació de solucions conjuntistes no degenerades de l'equació de Yang-Baxter a la classificació de braces per l'esquerra no commutatives, un problema que tractem d'estudiar a la resta de la tesi.

D'entre totes les braces per l'esquerra no commutatives, les que tenen grup  $(B, \star)$  abelià s'anomenen «braces per l'esquerra», i tenen millors propietats algebraiques. A més, aquest tipus de braces generen solucions involutives, que són les més estudiades entre les solucions conjuntistes de l'equació de Yang-Baxter. Per això, als capítols

4 i 5 ens hem limitat a estudiar braces per l'esquerra.

Primer, estudiem el problema de trobar noves braces. A la secció 4.1, presentem dos mètodes nous per construir braces per l'esquerra: extensions de braces per l'esquerra per ideals trivials, i *matched product* de braces. Aquestes construccions estan basades en les construccions anàlogues en grups. Motivats per les extensions de braces, a la secció 4.2 construïm la primera família de braces per l'esquerra finites simples no trivials. Diem que una braça per l'esquerra no nul·la és simple si els seus únics ideals són el zero i el total. Fins ara, no es coneixia cap exemple de braça finita simple, excepte l'exemple trivial del grup  $(\mathbb{Z}/(p), +)$ , on  $p$  és un primer, amb les operacions  $\star$  i  $\cdot$  iguals a la suma de  $\mathbb{Z}/(p)$ . Per trobar aquesta nova família, fem servir la construcció de *matched products* que havíem definit prèviament. Finalment, al capítol 5, classifiquem totes les braces per l'esquerra d'ordre  $p$ ,  $p^2$  i  $p^3$ , on  $p$  és un primer, fent servir les extensions de braces definides a la secció 4.1.

El segon problema que estudiem és trobar quins grups poden ser grups multiplicatius  $(B, \cdot)$  d'una braça per l'esquerra finita. Etingof, Schedler i Soloviev van demostrar que aquests grups multiplicatius són sempre resolubles, i era un problema obert saber si el recíproc era cert. A la secció 4.3, trobem el primer exemple de  $p$ -grup finit, que no és grup multiplicatiu d'una braça per l'esquerra, fet que demostra que el recíproc del resultat d'Etingof, Schedler i Soloviev no és cert. Caracteritzar quins grups resolubles poden tenir estructura de braça per l'esquerra continua sent un problema obert.

- VÍCTOR PONCE LÓPEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Sergio Escalera, Xavier Baró Solé i Hugo Jair Escalante, titulada *Evolutionary bags of space-time features for human analysis*, el dia 2 de juny de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona.



Els humans són experts a reconèixer objectes i esdeveniments del món. El cervell és capaç de realitzar aquest tipus de tasques cognitives complexes, com correlacionar eficientment la informació percebuda des dels nostres sentits amb la informació ja emmagatzemada a la memòria per seleccionar els objectes resultants a partir de la informació percebuda o l'estímul d'entrada.

Recentment, els models emergents inspirats en l'aprenentatge profund (*deep learning*) inclouen les aproximacions basades en bosses de paraules visuals (*bag of visual words*, BoVW) com a part de l'arquitectura les seves xarxes. Aquestes noves aproximacions inclouen el desenvolupament de sistemes robustos, que es caracteritzen per tres avantatges principals: modelar la invariància present en les dades, transferir l'aprenentatge no supervisat i aprendre estructures jeràrquiques. L'aprenentatge de la representació (o de característiques) ha estat un concepte que ha evolucionat considerablement durant els darrers anys. Aquest treball recopila un conjunt de tècniques que són presents en qualsevol metodologia teòrica o pràctica relativa a la intel·ligència artificial. En la visió per computadora, les representacions més comunes han adoptat la forma de la coneguda BoVW. La representació apareix implícitament en la majoria d'aproximacions per descriure imatges, així com en un gran nombre d'àrees i dominis: recuperació de contingut en imatges, detecció de vianants, interacció humà-ordinador, vigilància, e-salut o la computació social, entre d'altres.

Les fases inicials d'aquesta dissertació ofereixen una aproximació per aprendre representacions visuals dins d'algorismes evolutius, que consisteix a evolucionar esquemes de pesatge per millorar les representacions BoVW en la tasca de reconèixer les categories de vídeos i imatges. Per tant, demostrem l'aplicabilitat dels esquemes de pesatge més comuns, que

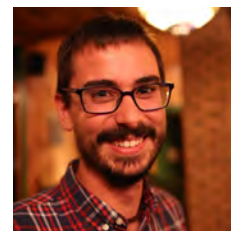
s'usen sovint en la mineria de textos però són menys habituals en tasques de visió per computadora. Més enllà d'aprendre representacions visuals, proporcionem una aproximació basada en estratègies de fusió per a l'aprenentatge de representacions espaciotemporals, a partir de dades multimodals obtingudes per sensors de profunditat. A més, el nostre objectiu és especialment el modelatge evolutiu i dinàmic, en què el factor temporal és present en la naturalesa de les dades, com també les seqüències de gestos i accions. De fet, explorem els efectes del modelatge probabilístic en aquelles aproximacions basades en programació dinàmica per gestionar la deformació temporal i variància entre seqüències de vídeo per a categories diferents. Finalment, integrem la programació dinàmica i els models generatius en un marc de computació evolutiva, amb l'objectiu d'aprendre representacions en bosses de subgestos i, per tant, millorar la capacitat de generalització de les aproximacions estàndards per al reconeixement de gestos.

Els resultats obtinguts en l'experimentació demostren, en primer lloc, que els algorismes evolutius són útils per millorar la representació d'aproximacions BoVW en diverses bases de dades per reconèixer categories en imatges fixes i seqüències de vídeo. En segon lloc, la nostra experimentació revela que tant l'ús de la programació dinàmica i els models generatius per alinear seqüències de vídeos, com les representacions obtingudes d'aplicar estratègies de fusió en dades multimodals, comporten una millora en el rendiment a l'hora de reconèixer algunes categories de gestos. A més, la combinació d'algorismes evolutius amb models basats en programació dinàmica i aproximacions generatives, a l'hora de classificar categories de vídeos de bases de dades grans, representen una millora considerable en les aproximacions estàndards de reconeixement de gestos i accions.

Finalment, demostrem les aplicacions d'aquestes representacions en diversos dominis per a l'anàlisi humana: classificació d'imatges on els humans poden aparèixer, el reconeixement d'accions i gestos per a aplicacions en general, i en particular per a entorns conversacionals en el camp de la justícia restaurativa.

xement d'accions i gestos per a aplicacions en general, i en particular per a entorns conversacionals en el camp de la justícia restaurativa.

- DAVID ROJAS PÉREZ va llegir la seva tesi, dirigida per Francesc Mañosas Capellades i Jordi Villadelprat Yagüe, titulada *Analytical tools to study the criticality at the outer boundary of potential centers*, el dia 11 de juliol de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



El principal interès d'aquesta memòria té a veure amb el marc de la teoria qualitativa d'equacions diferencials. El nostre objecte d'estudi són famílies de sistemes de centres al pla. Introduïm les nocions d'òrbita periòdica crítica i criticalitat, que són les nocions homòlogues a cicle límit i ciclicitat en el marc del problema setzè de Hilbert, respectivament. El nostre tema d'interès és estudiar la bifurcació d'òrbites periòdiques crítiques des de la frontera exterior de l'anell de períodes. D'acord amb la noció de criticalitat, estudiem el nombre d'òrbites periòdiques crítiques d'un centre continu que poden emergir o desaparèixer des de la frontera exterior quan movem el paràmetre. Més concretament, treballem amb famílies contínues de sistemes potencials analítics al pla. Les eines que desenvolupem permeten abordar el problema en les dues situacions següents: o bé l'energia de la frontera exterior és infinita o bé és finita, per a tots els paràmetres en consideració. En aquestes situacions, donem condicions suficients a fi que la criticalitat a la frontera exterior de l'anell de períodes sigui menor o igual que  $n$ . La principal idea en ambdós casos és trobar funcions analítiques que permetin incloure la derivada de la funció de període en un sistema ECT. Això implica en particular que la derivada de la funció

de període té com a màxim  $n$  zeros prop de la frontera exterior i, en conseqüència, la criticalitat està acotada per  $n$ . En relació amb això, dediquem el capítol 1 al desenvolupament d'eines analítiques per abordar el problema. Les tècniques en aquest capítol tracten el comportament asimptòtic a l'infinit d'una funció de Wronskià. Al capítol 2 desenvolupem els criteris esmentats abans. Finalment, el nostre camp de proves és la família dos-paramètrica de sistemes potencials donada per:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= (1+x)^p - (1+x)^q. \end{cases}$$

La funció de període d'aquesta família va ser estudiada prèviament per Miyamoto i Yagasaki, que van provar que la funció és monòtona quan  $q = 1$  i  $p \geq 1$ . Al capítol 3 millorem aquest resultat juntament amb altres conclusions sobre la bifurcació d'òrbites periòdiques crítiques des del centre, des de l'interior quan pertorbem centres isòcrons, i des de la frontera exterior de l'anell de períodes. La combinació de tots aquests resultats ens permeten proposar una conjectura sobre el diagrama de bifurcació del comportament global de la funció de període del sistema que considerem.

- MARTÍ PRATS SOLER va llegir la seva tesi, dirigida per Xavier Tolsa Domènech, titulada *Singular integral operators on Sobolev spaces on domains and quasiconformal mappings*, el dia 6 d'octubre de 2016. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



Un bon nombre d'equacions en derivades parcials (EDP) se solucionen mitjançant operadors que fem actuar en les dades de partida. La regularitat d'aquestes dades inicials repercutirà en bones propietats de la solució depenent del comportament dels operadors involucrats en certs espais. En aquest cas, parlem d'espais de Lebesgue  $L^p$  i d'espais de Sobolev  $W^{n,p}$ , que contenen les funcions que tenen derivades a  $L^p$  fins a ordre  $n$ .

Els operadors de Calderón-Zygmund són operadors que actuen com la convolució amb un nucli que té l'homogeneïtat (inversa) de l'espai ambient. Per exemple, la convolució del nucli  $K(x) = \frac{1}{|x|^d}$  amb una funció suau  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , és a dir,  $K * f(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^d} dy$ , no té sentit en no ser el nucli integrable a l'origen, però quan el nucli té certes propietats de cancel·lació com el cas de  $\frac{x_1}{|x|^{d+1}}$ , aleshores prenent límits convenientment en la convolució es pot definir un operador  $T$  acotat en  $L^p$  per  $1 < p < \infty$  i, en ser invariant per translacions, aquesta acotació s'estén ràpidament a espais de Sobolev. En aquesta classe d'operadors es troben les transformades de Riesz i la transformada de Beurling, operadors que envien derivades d'una funció a altres derivades de la mateixa funció i que, com a conseqüència, són claus en la resolució d'EDP.

Com que moltes EDP es defineixen en dominis (oberts connexos de  $\mathbb{R}^d$ ), val la pena tenir un control de com interactua  $T$  amb espais de funcions restringides a un domini  $\Omega$ , és a dir, com es comporta l'operador  $T_\Omega: f \mapsto \chi_\Omega T(\chi_\Omega f)$  en espais tipus  $W^{n,p}(\Omega)$ . El resultat dependrà sempre de tres elements, a saber, l'espai de funcions, la regularitat del nucli i la naturalesa de la frontera del domini.

Un teorema T(1) és un resultat que diu que per saber si un operador és acotat en un espai de funcions, n'hi ha prou de conèixer com actua

sobre la funció constant 1. La tesi parteix d'un resultat d'aquest tipus en dominis uniformes per espais de Sobolev en el domini  $W^{n,p}(\Omega)$ . Es demostra que quan  $p > d$ , l'operador  $T_\Omega$  és acotat a  $W^{n,p}(\Omega)$  si i només si ho és sobre polinomis, és a dir, si  $T_\Omega P \in W^{n,p}(\Omega)$  per qualsevol polinomi  $P$  de grau més petit que  $n$ . En el cas  $p \leq d$  es desenvolupa una caracterització en termes de si  $|\nabla^n T_\Omega P(x)|^p dx$  és una mesura de Carleson o no, condició que es demostra òptima quan  $n = 1$ .

En els capítols que treballen aquestes qüestions, s'estudien també espais de suavitat fraccionària (anomenats «espais de Triebel-Lizorkin»), que apareixen a través de la interpolació entre espais de Sobolev, per la qual cosa el treball inclou una dissertació sobre espais fraccionaris en dominis uniformes que contenen noves caracteritzacions de les normes en termes de diferències i un teorema d'extensió per a dominis uniformes.

Finalment, aquestes tècniques s'apliquen al cas particular de les equacions uniformement el·líptiques del pla a través de l'estudi de la transformada de Beurling  $\mathbf{B}$  i de les funcions quasiconformes. Veiem que si la frontera del domini té vector normal unitari parametritzat per l'arc a l'espai de traces de  $W^{n,p}(\Omega)$  per un cert  $p > 2$ , aleshores  $\mathbf{B}_\Omega$  és acotada a  $W^{n,p}(\Omega)$ . D'aquesta manera, i usant totes les tècniques apreses en el camí, s'arriba a un teorema d'automillora de funcions quasiconformes del pla complex. Un homeomorfisme del pla complex  $f \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$  s'anomena «quasiconforme» si distorsiona els angles de manera controlada. L'aplicació quasiconforme és determinada pel seu coeficient de Beltrami  $\mu$ , que regula la distorsió en cada punt. La tesi conclou provant que si  $\mu$  s'anul·la fora d'un domini  $\Omega$  amb vector normal a l'espai de traces de  $W^{n,p}(\Omega)$  per a un cert  $p > 2$  i  $\mu \in W^{n,p}(\Omega)$ , aleshores  $f \in W^{n+1,p}(\Omega)$ .



# Experiències: matemàtiques

**PROHIBIT NO TOCAR**

Des de febrer de 2014, l'Ajuntament de Cornellà ha cedit al **mmaca** la segona planta del Palau Mercader per instal·lar-hi una exposició permanent.

Disposem de 400 m<sup>2</sup> amb sales dedicades a geometria, combinatòria, càlcul, estadística, miralls, l'esfera de la Terra i un espai dedicat especialment als primers cursos de Primària.

Aprofitant el magnífic entorn del Parc, organitzem jornades singulars a l'exterior: Aniversari (febrer), Dia Pi (març), Dia escolar de les matemàtiques (maig), Dia de Martin Gardner (octubre).

La majoria dels materials del **mmaca** estan dissenyats i fets a mà per nosaltres. Utilitzem materials senzills: fusta, cordes, teles, vidre, plàstic.

Regularment programem conferències i altres activitats divulgatives.

**Us convidem a visitar-nos!**  
**Us quedareu més temps del que havíeu previst!**

**Museu de Matemàtiques de Catalunya**  
Palau Mercader - Parc Can Mercader  
Carretera de L'Hospitalet, s/n.  
08940 Cornellà de Llobregat

Gavarrà  
 L5

**mmaca**  
PARC CAN MERCADER

CARRETERA DE L'HOSPITALET  
 L12, L52, L82

Almeda  
 L8

R5	R6	R50
R60	S8	S33

**Entrada gratuïta**  
Dimecres de 17 a 20h  
Diumenge de 10 a 14h

**Grups amb reserva prèvia**  
Matins de dilluns a divendres  
Dilluns i dimecres a la tarda

**Tallers per a famílies**  
Diumenge de 10 a 11h

reserves.cornella@mmaca.cat  
tel. 665233448 (de 10 a 13h)

**www.mmaca.cat**  
 @mmaca\_cat mmaca.cat

El **mmaca** es troba en un punt molt important de la seva història. Durant els 10 anys de recorregut, hem treballat molt i el projecte ha crescut amb força. L'objectiu d'apropar les matemàtiques a la societat s'està complint i tenim el reconeixement generalitzat de tots els que ens coneixen.

Ara necessitem saber amb qui podem comptar per a poder afrontar els reptes futurs i continuar oferint activitats arreu del territori: **necessitem persones.**

Però no ens n'amagarem: també **necessitem diners.** Afortunadament, les donacions fetes en favor del **mmaca** gaudeixen d'avantatges fiscals interessants de fins al 75% de desgravació en l'IRPF.

Ara més que mai **necessitem els nostres amics a la vora!**

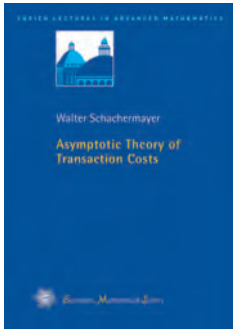
Si vols fer-nos costat, ens ho pots fer saber escrivint a [mecenes@mmaca.cat](mailto:mecenes@mmaca.cat)





## New books published by the European Mathematical Society

Individual members of the EMS, member societies or societies with a reciprocity agreement (such as the American, Australian and Canadian Mathematical Societies) are entitled to a discount of 20% on any book purchases, if ordered directly at the EMS Publishing House.



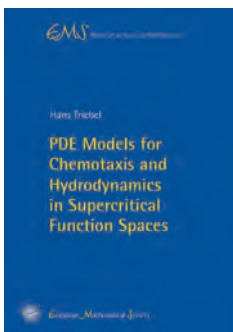
Walter Schachermayer (Universität Wien, Austria)  
**Asymptotic Theory of Transaction Costs** (Zürich Lectures in Advanced Mathematics)

ISBN 978-3-03719-173-6. 2017. 160 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 34.00 Euro

A classical topic in Mathematical Finance is the theory of portfolio optimization. Robert Merton's work from the early seventies had enormous impact on academic research as well as on the paradigms guiding practitioners.

One of the ramifications of this topic is the analysis of (small) proportional transaction costs, such as a Tobin tax. The lecture notes present some striking recent results of the asymptotic dependence of the relevant quantities when transaction costs tend to zero.

An appealing feature of the consideration of transaction costs is that it allows for the first time to reconcile the no arbitrage paradigm with the use of non-semimartingale models, such as fractional Brownian motion. This leads to the culminating theorem of the present lectures which roughly reads as follows: for a fractional Brownian motion stock price model we always find a shadow price process for given transaction costs. This process is a semimartingale and can therefore be dealt with using the usual machinery of mathematical finance.

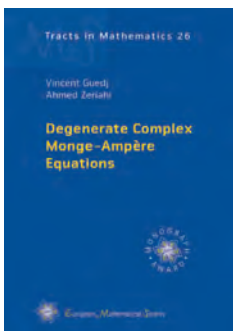


Hans Triebel (University of Jena, Germany)  
**PDE Models for Chemotaxis and Hydrodynamics in Supercritical Function Spaces** (EMS Series of Lectures in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-171-2. 2017. 138 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 32.00 Euro

This book deals with PDE models for chemotaxis (the movement of biological cells or organisms in response of chemical gradients) and hydrodynamics (viscous, homogeneous, and incompressible fluid filling the entire space). The underlying Keller–Segel equations (chemotaxis), Navier–Stokes equations (hydrodynamics), and their numerous modifications and combinations are treated in the context of inhomogeneous spaces of Besov–Sobolev type paying special attention to mapping properties of related nonlinearities. Further models are considered, including (deterministic) Fokker–Planck equations and chemotaxis Navier–Stokes equations.

These notes are addressed to graduate students and mathematicians having a working knowledge of basic elements of the theory of function spaces, especially of Besov–Sobolev type and interested in mathematical biology and physics.



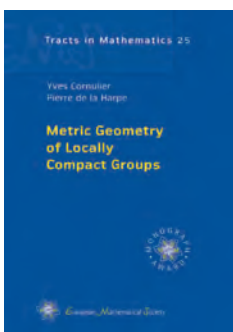
Vincent Guedj and Ahmed Zeriahi (both Université Paul Sabatier, Toulouse, France)  
**Degenerate Complex Monge–Ampère Equations** (EMS Tracts in Mathematics, Vol. 26)

ISBN 978-3-03719-167-5. 2017. 496 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 88.00 Euro

Complex Monge–Ampère equations have been one of the most powerful tools in Kähler geometry since Aubin and Yau's classical works, culminating in Yau's solution to the Calabi conjecture. A notable application is the construction of Kähler–Einstein metrics on some compact Kähler manifolds. In recent years degenerate complex Monge–Ampère equations have been intensively studied, requiring more advanced tools.

The main goal of this book is to give a self-contained presentation of the recent developments of pluripotential theory on compact Kähler manifolds and its application to Kähler–Einstein metrics on mildly singular varieties. After reviewing basic properties of plurisubharmonic functions, Bedford–Taylor's local theory of complex Monge–Ampère measures is developed. In order to solve degenerate complex Monge–Ampère equations on compact Kähler manifolds, fine properties of quasi-plurisubharmonic functions are explored, classes of finite energies defined and various maximum principles established. After proving Yau's celebrated theorem as well as its recent generalizations, the results are then used to solve the (singular) Calabi conjecture and to construct (singular) Kähler–Einstein metrics on some varieties with mild singularities.

The book is accessible to advanced students and researchers of complex analysis and differential geometry.



Yves Cornuier (Université Paris-Sud, Orsay, France) and Pierre de la Harpe (Université de Genève, Switzerland)  
**Metric Geometry of Locally Compact Groups** (EMS Tracts in Mathematics, Vol. 25)

ISBN 978-3-03719-166-8. 2016. 241 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 62.00 Euro

The main aim of this book is the study of locally compact groups from a geometric perspective, with an emphasis on appropriate metrics that can be defined on them. The approach has been successful for finitely generated groups, and can favourably be extended to locally compact groups. Parts of the book address the coarse geometry of metric spaces, where 'coarse' refers to that part of geometry concerning properties that can be formulated in terms of large distances only. This point of view is instrumental in studying locally compact groups.

Basic results in the subject are exposed with complete proofs, others are stated with appropriate references. Most importantly, the development of the theory is illustrated by numerous examples, including matrix groups with entries in the field of real or complex numbers, or other locally compact fields such as  $p$ -adic fields, isometry groups of various metric spaces, and, last but not least, discrete group themselves.

The book is aimed at graduate students and advanced undergraduate students, as well as mathematicians who wish some introduction to coarse geometry and locally compact groups.





# SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

## Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

Carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona

c/e: scm@iecat.net Adreça web: <http://www.iecat.net/scm>

### Sol·licitud d'inscripció com a soci de la SCM o actualització de dades

(cal imprimir-a, omplir-la, signar-la i enviar-la a la SCM per correu electrònic, fax o correu ordinari)

Tipus de soci:  Ordinari  Estudiant\*  Institució

En reciprocitat. Sóc soci de \_\_\_\_\_  
(Al web trobareu la llista de societats amb les quals la SCM té acords de reciprocitat.)

Nom i cognoms: \_\_\_\_\_  
o institució

Adreça: \_\_\_\_\_ Codi postal: \_\_\_\_\_

Població: \_\_\_\_\_ NIF: \_\_\_\_\_

Correu electrònic: \_\_\_\_\_ Telèfon: \_\_\_\_\_ Fax: \_\_\_\_\_

Lloc d'estudi o de treball: \_\_\_\_\_

### Dades per a la domiciliació bancària

Qui signa aquest document autoritza que anualment es faci efectiu el rebut de soci de la Societat Catalana de Matemàtiques a nom de \_\_\_\_\_

a la llibreta d'estalvi / el compte / la targeta de crèdit que s'indica seguidament:

Títular del compte o targeta : \_\_\_\_\_

Entitat bancària: \_\_\_\_\_

Adreça de l'oficina: \_\_\_\_\_

Codi de l'entitat, oficina i dígits de control: \_\_\_\_\_

Número del compte o llibreta: \_\_\_\_\_

Targeta de crèdit: \_\_\_\_\_ Caducitat: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_ NIF: \_\_\_\_\_

Signat: \_\_\_\_\_

### Signatura

Envieu la butlleta d'inscripció i l'ordre de domiciliació, que trobareu al web de la SCM, <http://blogs.iec.cat/scm/la-societat/fes-ten-soci/>, per correu postal o correu electrònic, emplenada i signada.

Les quotes per a l'any 2017 són les següents: 36 euros socis ordinaris, 18 euros socis estudiants i membres de societats amb conveni de reciprocitat i 72 euros institucions.

D'acord amb la Llei orgànica 15/1999, del 13 de desembre, de protecció de dades de caràcter personal, us informem que les vostres dades seran incorporades en un fitxer que és responsabilitat de l'Institut d'Estudis Catalans, amb la finalitat de gestionar els socis i d'enviar comunicacions de les activitats i publicacions de la Societat i de l'Institut d'Estudis Catalans (IEC). Podeu exercir els drets d'accés, rectificació, cancel·lació i oposició de les vostres dades personals adreçant-vos per escrit a l'Institut d'Estudis Catalans (carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona) o bé enviant un correu electrònic a l'adreça [lop@iecat.net](mailto:lop@iecat.net).

\*Cal adjuntar fotocòpia del comprovant de la matrícula



SCM / Notícies / 41  
Edita la Societat Catalana de Matemàtiques  
Filial de l'Institut d'Estudis Catalans

